直接積分Newmark-β法の特性と地震動応答解の信頼度に関する検討

関東学院大学　学生員　　吉田笑子
関東学院大学　フェロー　吉田　裕

１．　はじめに

構造物の動的応答解析システムの過半に Newmark-β法が採用されているが，Newmark-β法は近似法であり，得られる解の信頼度は採られる時間増分の大きさに依存する．一方で，地震の加速度波形は非常に小さな時間増分ごとの加速度の大きさとして与えられるので，加速度記録に採られる時間増分に基づいて解析を行なう限り，得られる解の信頼度は高いものと考えられている一面がある．本研究は，構造物内の局所的な応力評価に影響する相対的に高い振動数領域で，実地震記録のもとで，Newmark-β法によって得られる応答解析結果の信頼度を，基礎的に検討したものである．

２．　Newmark-β法の評価特性

Newmark-β法は，パラメータγ，βを導入して，線形加速度法および平均加速度法を含めて一般化した，時刻$\langle t\rangle$および$\langle t+\Delta t\rangle$における変位x，速度$\dot{x}$，加速度$\ddot{x}$の間の，次の関係式に基づくものである．

$$x_{\langle t+\Delta t\rangle}=x_{\langle t\rangle}+\Delta t\cdot\dot{x}_{\langle t\rangle}+(1/2-b)\cdot(\Delta t)^2\cdot\ddot{x}_{\langle t\rangle}+b\cdot(\Delta t)^2\cdot\ddot{x}_{\langle t+\Delta t\rangle} \quad (1)$$

$$\dot{x}_{\langle t+\Delta t\rangle}=\dot{x}_{\langle t\rangle}+(1-g)\cdot\Delta t\cdot\ddot{x}_{\langle t\rangle}+g\cdot\Delta t\cdot\ddot{x}_{\langle t+\Delta t\rangle} \quad (2)$$

式（１），（２）および運動方程式　$\ddot{x}+w^2\cdot x=0$　から，次の関係式が得られる．

$$\begin{Bmatrix} x_{\langle t+\Delta t\rangle} \\ \Delta t\cdot\dot{x}_{\langle t+\Delta t\rangle}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1-(1/2-b)\cdot(w\cdot\Delta t)^2}{1+b\cdot(w\cdot\Delta t)^2} & \dfrac{1}{1+b\cdot(w\cdot\Delta t)^2} \\ -\dfrac{(w\cdot\Delta t)^2-(g/2-b)\cdot(w\cdot\Delta t)^4}{1+b\cdot(w\cdot\Delta t)^2} & \dfrac{1-(g-b)\cdot(w\cdot\Delta t)^2}{1+b\cdot(w\cdot\Delta t)^2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_{\langle t\rangle} \\ \Delta t\cdot\dot{x}_{\langle t\rangle}\end{Bmatrix} \quad (3)$$

式（３）を $\{\mathbf{X}_{\langle t+\Delta t\rangle}\}=[\mathbf{A}]\{\mathbf{X}_{\langle t\rangle}\}$ と書く．積分漸化計算が，$w\cdot\Delta t$ の採り方に依らず，無条件に安定であるためには，特性方程式 $\det([\mathbf{A}]-l\cdot[\mathbf{I}])=0$ が共役複素根 $l_{1,2}$ を持ち，スペクトル半径 $r=\max(|l_{1,2}|)$ が，$r\le 1$ であることが必要である．この条件は，$b\ge(g+1/2)^2/4$ であり，$g\ge 1/2$ であることに対応する．

パラメータ g，b が上記の条件を満たすとき，振幅の評価精度に相当するスペクトル半径 r は式（４）で与えられ，数値的に評価される周期 T_{numeri} と真の周期 T_{real} の比は式（５）で与えられる．

$$r=\sqrt{1-\frac{(g-1/2)\cdot(w\cdot\Delta t)^2}{1+b\cdot(w\cdot\Delta t)^2}}\quad,\quad \frac{T_{real}}{T_{numeri}}=\frac{1}{w\cdot\Delta t}\cdot\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\{b-(g+1/2)^2/4\}\cdot(w\cdot\Delta t)^2}}{1+\{b-(g+1/2)/2\}\cdot(w\cdot\Delta t)^2}\cdot w\cdot\Delta t\right] \quad (4)(5)$$

図-１は，パラメータ g，b の採り方による特性の違いを図示したものである．

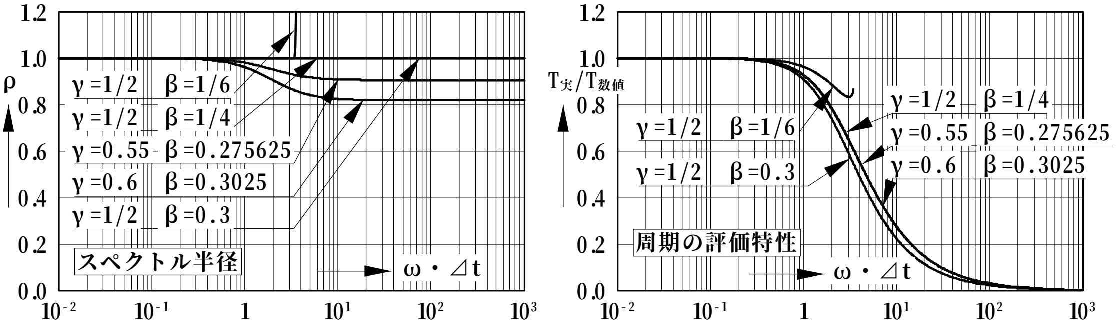

図-１　Newmark-β法の振幅と周期の評価特性

Newmark-β法，地震動応答，解の信頼度，地震時応力評価
横浜市金沢区六浦町 4834　Tel.& Fax. 045-786-7147

３． 外乱加速度が時間増分間を直線的に変化する場合の理論解と数値解

支点に加速度 $\ddot{x}_s$ が入力されるとき，質点の変位 x と支点の変位 x_s との相対変位 $\hat{x} = x - x_s$ で与えられる運動方程式 $m\cdot\ddot{\hat{x}} + c\cdot\dot{\hat{x}} + k\cdot\hat{x} = -m\cdot\ddot{x}_s$ の，初期条件 $\dot{\hat{x}}_0 = \hat{x}_0 = 0$ のもとでの解 $\hat{x}$ は Duhamel 積分によって次のように与えられる．ここに，$k/m = w^2$，$c/m = 2\cdot x\cdot w$ である．

$$\hat{x}(t) = -(1/w)\cdot(1/\sqrt{1-x^2})\cdot\int_0^t \ddot{x}_s(t)\cdot e^{-x\cdot w\cdot(t-t)}\cdot\sin(\sqrt{1-x^2}\cdot w\cdot(t-t))\cdot dt \qquad (6)$$

地震加速度記録は，短い時間間隔 Δt_{ac}（気象庁の記録では通常 $\Delta t_{ac} = 0.02s$ が採られている）ごとの加速度の大きさとして与えられる．図-２は，$t = 0$ から $t = 0.02s$ の間で，加速度が 0 から単位の値だけ直線的に変化し，その後単位の値を一定に保つ場合の理論解を，積分時間間隔 Δt を 0.02s に採って，Newmark-β法（γ=1/2，β=1/4）によって得られる解と比較したものである．縦軸は，$-1/w^2$ で除して正規化している．

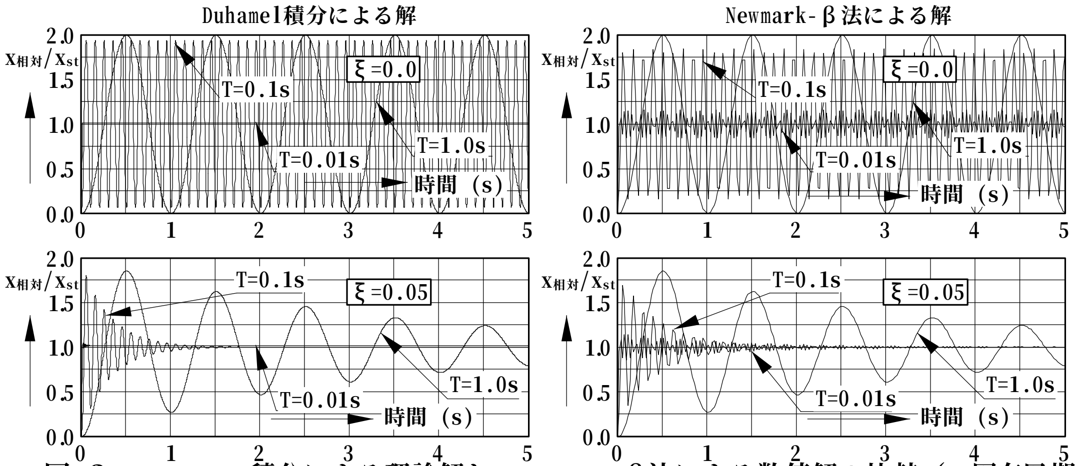

図-２ Duhamel 積分による理論解と Newmark-β法による数値解の比較（T:固有周期）

４． 実地震波のもとで得られる応答解の比較

兵庫県南部地震における神戸海洋気象台の加速度記録 UD 成分のもとでの，固有周期 $T = 0.1s$ の構造の応答相対変位について，Newmark-β法によって求めた結果を，Duhamel 積分による理論解と比較して図-３に示した．高い振動数領域 $(w\cdot\Delta t = 1.256)$ では，積分時間間隔 $\Delta t = 0.02s$ でも十分ではないことが分かる．

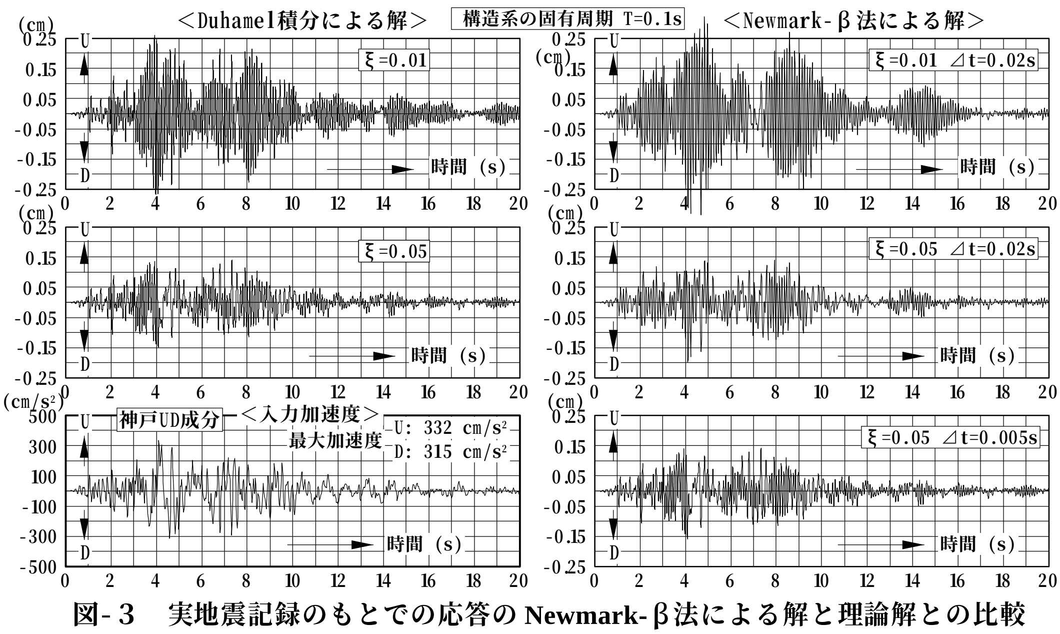

図-３ 実地震記録のもとでの応答の Newmark-β法による解と理論解との比較

５． おわりに

柱の軸力など，構造物内部の局所的な応力評価には，相対的に高い振動数領域での解の信頼度が大きく関わるので，応答解析に当たっての積分時間間隔の採り方には十分な配慮が必要である．