# 位相スペクトル準拠の地震波形の合成法

京都大学防災研究所　正会員　佐藤忠信
（財）鉄道総合技術研究所　正会員　室野剛隆

## 1.　はじめに

地震動は因果性を有しているので，振幅と位相を独立に与えることができないことは良く知られている．しかし，これまでは振幅スペクトルが与えられたときに位相スペクトルにどのような拘束条件を与えれば，因果性を満たす地震動がシミュレートできるかが明確ではなかった．そこで，地震動の位相スペクトルに着目して，因果性を満たすような地震動のフーリエスペクトルの実部と虚部を位相スペクトルから求める方法論を新しく開発した．開発した方法論を用いて，位相スペクトルから波形を合成する方法を考えた．

## 2.　因果律を拘束条件とした位相スペクトルからの実数部と虚数部の決定

因果律を満たす実時間関数を $y_m$ とし，以下のような偶関数 $y_m^e$ と奇関数 $y_m^o$ を定義する．

$$y_m^e = \tfrac{1}{2}\left(y_m + y_{-m}\right), \qquad y_m^o = \tfrac{1}{2}\left(y_m - y_{-m}\right) \tag{1}$$

この場合は $y_{-m}^e = y_m^e$ かつ $y_{-m}^o = -y_m^o$ となる．したがって $y_m = y_m^e + y_m^o$ と次式の関係が得られる．

$$y_m^o = sgn(m)\cdot y_m^e\,, \qquad y_m^e = sgn(m)\cdot y_m^o \tag{2}$$

ここに，$sgn(m)$ は $m$ が負の時は-1.0，$m$ が正の時は 1.0 の値を持つ符号関数である．また，$y_m^e$ が偶関数であることに着目すると，

$$y_m^e = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} C_k \cdot e^{i\left(\frac{2\pi km}{N}\right)} = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2}\left[\Re\left(C_k\right)\cdot cos\frac{2\pi km}{N}\right] \tag{3}$$

となるので，これを式(2)の第 1 式に代入すれば，次式を得る．

$$y_m^o = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2}\left[\Re\left(C_k\right)\cdot \cos\frac{2\pi km}{N}\right] \quad m>0;\quad y_m^o = 0 \quad m=0;\quad y_m^o = -\sum_{k=-N/2+1}^{N/2}\left[\Re\left(C_k\right)\cdot \cos\frac{2\pi km}{N}\right] \quad m>0 \tag{4}$$

一方，奇関数 $y_m^o$ のフーリエ係数は次のように与えられる．

$$C_l = i\Im\left(C_l\right) = -i\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N/2-1}\left[y_m^o \cdot sin\left(\frac{2\pi lm}{N}\right)\right] \tag{5}$$

式(5)に式(4)を代入して次式の関係が求められる。

$$\Im\left(C_l\right) = -\frac{2}{N}\sum_{k=-N/2+1}^{N/2}\sum_{m=1}^{N/2-1}\cos\left(\frac{2\pi km}{N}\right)\sin\left(\frac{2\pi lm}{N}\right)\cdot\Re\left(C_k\right) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2}\beta_{lk}\cdot\Re\left(C_k\right) \tag{6}$$

$$\text{ここに，}\quad \beta_{lk} = -\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N/2-1} cos\left(\frac{2\pi km}{N}\right) sin\left(\frac{2\pi lm}{N}\right) \tag{7}$$

いま，位相角 $\phi_l$ は $tan\,\phi_l =$ (虚数部/実数部)定義できるから，$\Re\left(C_k\right) = R_k$ とし，さらに $R_k$ の対称性を利用すると，

$$R_l \cdot \tan\phi_l = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2}\beta_{lk}\cdot R_k = 2\sum_{k=1}^{N/2-1}\beta_{lk}\cdot R_k + \beta_{l,N/2}\cdot R_{N/2} \tag{8}$$

を得る．ただし，$R_0 = 0$ (時系列信号に DC 成分がないことを意味している)と仮定する．これは，$R_k$ に関する同次形の方程式であるので $R_1 = 1.0$ とすることにより，式(8)より $R_k/R_1$ の値が決定できる．以上に述べてきたことから，因果性を有する時系列では，フーリエ係数の実数部の相対的な大きさが位相スペクトルから決定できることが分る．さらに，この値を式(6)に代入すれば，$R_1 = 1.0$ の仮定の基に，虚数部の値も決定できることになる．$R_1 = 1.0$ の仮定があるので，この時系列の振幅の大きさには任意性がある．これは，位相ス

---

Key wards : 位相スペクトル，因果律，地震波形，フーリエ級数
連絡先：〒611-0011　宇治市五ヶ庄　京都大学防災研究所

ペクトルは虚数部と実数部の比で定義されるので，位相スペクトルから取り出せる振幅の情報は相対的なものにならざるを得ないためである．

## 3.　相関性のある群遅延時間

著者らは既に，多くの地震記録を用いて群遅延時間の平均値および標準偏差をマグニチュード $M$ と震央距離△を用いてモデル化してきた[1]．さらに台湾集集地震を例にして断層近傍地震の $t_{gr}$ のモデル化も試みてきた[2]．そこで，これらの成果を用いて位相スペクトル $\phi_k$ （$k=0,1,\cdots,N/2$）を決定することを考える．いま，群遅延時間の平均値 $\mu_{tgr,k}$ と標準偏差 $\sigma_{tgr,k}$ が与えられた場合を考える．これまで周波数の離散点ごとに独立なガウス分布または $t$ 分布としてサンプリングしていたが，群遅延時間には周波数領域での相関が存在しているはずなので，群遅延時間がガウス分布と表現される場合には，群遅延時間の同時確率密度関数 $p(t_{gr,1},t_{gr,2},\cdots,t_{gr,N/2})$ は次式で定義されなければならない．

$$p(t_{gr,1},t_{gr,2},\cdots,t_{gr,N/2})=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{N/4}|\mathbf{M}|}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{t}-\mu)^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{t}-\mu)\right\} \tag{9}$$

ここに，M は共分散マトリクスで，

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1,N/2}\sigma_1\sigma_{N/2}\\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2,N/2}\sigma_2\sigma_{N/2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \rho_{N/2,1}\sigma_{N/2}\sigma_1 & \rho_{N/2,2}\sigma_{N/2}\sigma_2 & \cdots & \sigma_{N/2}^2\end{bmatrix},\quad \mathbf{t}=\begin{Bmatrix}t_{gr,1}\\ t_{gr,2}\\ \vdots\\ t_{gr,N/2}\end{Bmatrix},\quad \mu=\begin{Bmatrix}\mu_{tgr,1}\\ \mu_{tgr,2}\\ \vdots\\ \mu_{tgr,N/2}\end{Bmatrix} \tag{10}$$

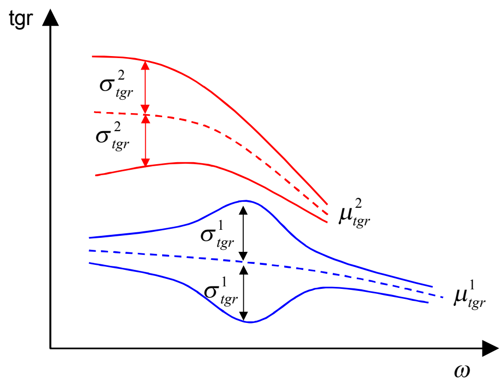
$\rho_{jk}$ は相関係数，$j$ および $k$ は周波数の離散点である．実地震波の $\rho_{jk}$ がどの程度の値になるかは，今後検討する余地があるが，式(9)の多次元過程でサンプル群遅延時間をシミュレートすれば相関性のある群遅延時間が得られる．

## 4. 波形合成法

例えば，地震波を実体波と表面波に分けて考えると，ある地震波 $f(t)$ は

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t) \tag{11}$$

と表せる．ここに $f_1(t)$ は実体波，$f_2(t)$ は表面波に相当する．とこのとき，$f_1(t)$ と $f_2(t)$ の群遅延時間 $t_{gr}$ の平均値と標準偏差をそれぞれ $\mu_{tgr}^1$，$\sigma_{tgr}^1$，$\mu_{tgr}^2$，$\sigma_{tgr}^2$ とする．表面波は長周期成分が卓越し，その到達時間は実体波よりも遅く，継続時間が長いことを考慮すると，その群遅延時間の特性は図−1 のようになる．すると，$\mu_{tgr}^1$，$\sigma_{tgr}^1$ から乱数列を発生させることにより $t_{gr}$ を規定し，積分することにより位相 $\phi$ が決定される．これにより上記に示した方法により $f_1(t)$ が合成される．同様に，$f_2(t)$ も $\mu_{tgr}^2$，$\sigma_{tgr}^2$ から合成することができる．以上により，地震波 $f(t)$ を得ることができる．




図−1　群遅延時間の分布例

## 5.おわりに

本論文では，因果性を満足する時系列のフーリエ係数の比が位相スペクトルから決定できることを示した．今回の手法を用いると，著者らが提案した群遅延時間（位相を円振動数で微分したもの）の回帰モデル[1]を用いて位相スペクトルを決定することにより，非定常地震動のシミュレーションが可能となる．

**参考文献**　：1)佐藤忠信，室野剛隆，西村昭彦：観測波に基づく地震動の位相スペクトルのモデル化，土木学会論文集 No.640/I-50, 2000.1,　 2)室野剛隆，佐藤忠信：台湾集集地震の観測記録を用いた断層近傍地震動の位相スペクトルのモデル化，第 36 回地盤工学研究発表会講演概要集（投稿中），2001.