

線状地中構造物の耐震設計に用いる 地盤バネ定数について

松原勝己¹・星谷勝²

¹正会員 工修 株式会社間組 技術研究所 (〒305茨城県つくば市荻間字西向515-1)

²正会員 Ph.D 武蔵工業大学教授 工学部土木工学科 (〒158東京都世田谷区玉堤1-28-1)

線状地中構造物に対する長手方向の耐震設計に用いる地盤バネ定数の評価として、静的弾性論を用いる一方法を示すとともに、その算定式を導入した。その結果、軸方向の地盤バネ定数が、地盤のせん断弾性係数 G および変位がゼロになる半径と構造物の半径との比 λ に関係し、軸直角方向の地盤バネ定数が、 G 、地盤のポアソン比 ν および λ に関係することがわかった。また、 λ が増加するにつれて地盤バネ定数の値が減少する傾向がみられ、 λ が10程度からその低減が小さくなる。地盤バネ定数の G に対する比 α は、 λ が10のとき、軸方向および軸直角方向に対してそれぞれ約2.7および4.9となる。

Key Words : *spring constants, underground pipeline structures, earthquake structural design, seismic deformation method, static theory of elasticity*

1. まえがき

現在、シールドトンネル、共同溝および地中埋設管等の線状地中構造物の耐震設計は、自由地盤内の地震時の変位を、地盤バネを介して構造物に静的に作用させて断面力を求める応答変位法^{1), 2)}がよく用いられる。その際、地盤バネの設定値とその設定方法が重要な問題となる。現状の耐震設計では、地盤バネ定数の評価として、①有限要素法を用いた地中構造物の境界面に荷重を作用させて求める方法、②静的弾性論を用いる方法、③現場での載荷試験によって評価する方法、④地盤のせん断弾性係数の定数倍として設定する方法等が用いられている。上述の①の方法については、地中構造物の免震のための設計法に用いられた例³⁾や地中構造物の横断面方向の地盤バネの評価に用いられた例⁴⁾があり地中構造物の任意形状や地盤の境界条件を取り込める有力な方法と考えられるが、モデル化や計算上の手間など実用上の欠点がある。②の方法はシールドトンネルの横断面方向の解析に用いる地盤バネを、地盤を無限弾性体と仮定して求められた例⁵⁾がある。この方法は境界条件が単純な場合しか解が求まらないことや、評価式を求める過程に数学的な困難さを含むなどの問題点があるが、一旦評価式が求められれば解の性

質の一般的把握が可能なことやパラメータスタディが容易なことなどの利点がある。③の方法は地中送電用洞道の軸方向の耐震設計に対する地盤バネの評価に用いられた例⁶⁾があり、地盤バネを現位置の条件に即して直接的に評価できる利点があるが、得られるパラメータの再現性の問題や簡単に実行しづらいなどの問題点がある。④の方法は設計上の実用面から、比較的好く用いられている方法⁷⁾である。一般に地盤バネ定数は、線状地中構造物の断面形状、断面の大きさ、地盤の剛性および境界条件等に関連するものと考えられる。しかしながら、この方法において地盤のせん断弾性係数の定数倍として設定することの妥当性や理論的背景は、必ずしも明確ではないように思われる。本報では、地盤を弾性体と仮定し、円形断面を有する線状地中構造物の長手方向の解析に用いる軸方向および軸直角方向の地盤バネ定数を静的弾性論により算定することで、上述の④の方法の妥当性や他の方法との関連性を明らかにしようとするものである。

2. 軸方向の地盤バネ定数の評価

(1) 基本方程式

変位で表した弾性体の基本方程式(静的な釣り合

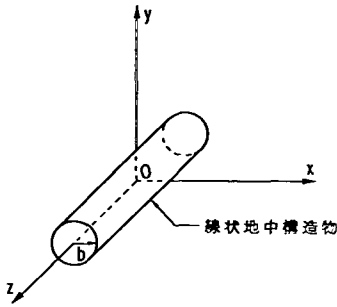


図-1 線状地中構造物のモデルと座標系

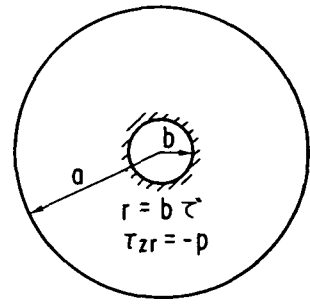


図-2 解析モデル

い式)は、式(1)で表される⁸⁾。

$$G \nabla^2 (u, v, w) + (\lambda + G) (\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z) e + (X, Y, Z) = 0 \quad (1)$$

ここに、 $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$

$$e = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z$$

$$\lambda = G / (1 - 2\nu)$$

また、 G :地盤のせん断弾性係数、 ν :ポアソン比、 u, v, w : x, y, z 方向の変位、 X, Y, Z : x, y, z 方向の物体力である。

線状地中構造物の軸方向を z 方向にとり、式(1)のうち z 方向の変位 w に関する基本方程式について、2次元状態の条件($\partial / \partial z = 0$)と物体力 $Z = 0$ の条件を考慮すれば、式(1)より式(2)を得る。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

また、ひずみと変位の関係式および応力とひずみの関係式から、せん断応力と変位の関係として式(3)が得られる。

$$\tau_{xz} = G \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3)$$

式(2)および(3)を極座標系で表示すれば、式(4)および(5)を得る。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} = 0 \quad (4)$$

$$\tau_{zr} = G \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \tau_{z\theta} = G \frac{\partial w}{r \partial \theta} \quad (5)$$

(2) 円孔にせん断応力を作用させた時の解

式(4)および(5)を用いて、半径 b の円孔の内部にせん断応力(作用方向は図-1で z 方向、図-2で紙面直角方向)を作用させた時の解を求める。地表面の影響が無視できると仮定し、式(4)において θ に無関係という条件 $\partial / \partial \theta = 0$ を考慮すれば

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{dw}{r dr} = 0 \quad (6)$$

すなわち

$$\frac{d}{r dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = 0 \quad (7)$$

したがって、変位 w の一般解は式(8)のように書ける。

$$w = c_1 \log r + c_2 \quad (8)$$

ここに、 c_1 および c_2 は境界条件より決定される定数である。

$r = b$ において、一様なせん断応力が作用する条件 $\tau_{zr} = -p$ より

$$\tau_{zr} = G \frac{\partial w}{\partial r} = G c_1 \frac{1}{r} = -p$$

すなわち

$$c_1 = -\frac{bp}{G} \quad (9)$$

さらに、 $r = a$ で変位がゼロになると仮定すれば $c_1 \log a + c_2 = 0$

すなわち

$$c_2 = -c_1 \log a = \frac{bp}{G} \log a \quad (10)$$

式(8)、(9)および(10)より、変位 w は、以下のよう

$$w = \frac{bp}{G} \log \frac{a}{r} \quad (11)$$

なお、式(10)により $r = a$ で変位をゼロに指定する必要があるのは、変位解の形が式(8)にみるように $r \rightarrow \infty$ でゼロに収束しないからであり、さらには本報のような二次元問題での応力が、外力作用点から遠ざかるにつれて $1/r$ の程度で減少することに関連している。

(3) 軸方向地盤バネ定数

図-3に示すように、線状地中構造物に対する単位長さ当たりの軸方向地盤バネ定数を k_1 とすれば、地中構造物に働く力と変位の関係から

$$2\pi b \cdot l \cdot p = k_1 \cdot (w)_{r=b} \quad (12)$$

式(11)より

$$(w)_{r=b} = \frac{bp}{G} \log \frac{a}{b} \quad (13)$$

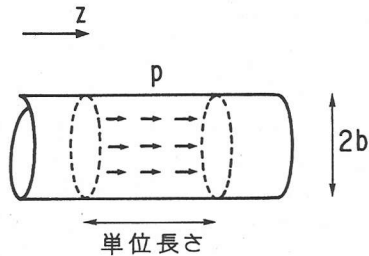


図-3 軸方向地盤バネ

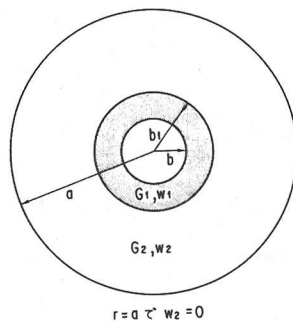


図-5 二層系モデル

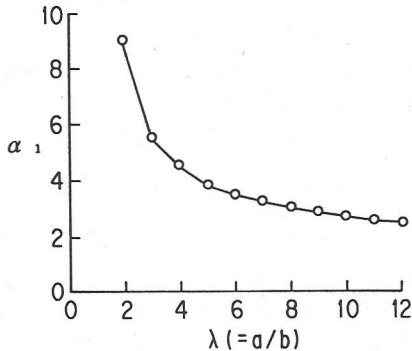


図-4 α_1 と λ の関係(軸方向)

したがって、式(12)および(13)より

$$k_1 = \alpha_1 G, \alpha_1 = \frac{2\pi}{\log \lambda}, \lambda = \frac{a}{b} \quad (14)$$

ここに、 b :線状地中構造物の半径、 a :変位がゼロとなる半径である。

式(14)によれば、地盤バネ定数が地盤のせん断弾性係数 G および線状地中構造物の半径と変位がゼロとなる半径の比 $\lambda (= a/b)$ に関係することがわかる。式(14)を用いて、係数 α_1 と λ の関係を図示すれば、図-4 のようになる。

図-4 によれば、係数 α_1 は、 λ の増加に伴って減少するが、 λ が10程度から α_1 の低減が小さくなるのがわかる。ここで、 λ が1変動するときの α_1 の変動を α_1 で割った値を α_1 の低減率と定義すれば、 λ が10で α_1 の低減率は5%以下である。

さらに、式(14)より λ が10のとき、 α_1 の値は約2.7になることがわかる。従来の耐震設計では、軸方向の地盤バネ定数のせん断弾性係数に対する比として1.0ないし3.0の値^{9), 10)}が用いられているが、上に示した λ が10に対応する値はこれらと同程度である。また、地中送電用洞道の小型模型を盛土中に埋設した荷重実験の結果から推定された値約3.0⁹⁾とも同程度である。

なお、本報での解析では従来の方法や模型荷重試

験の結果から得られた地盤バネ定数とオーダーの比較を行ったが、本報の単純な境界条件のもとでは、有限要素法等の数値計算によらずとも地盤バネ定数の概略値が算定できることに本報の方法の有用性があると考えられる。

(4) 二層系の場合

(3)では、線状地中構造物の周辺地盤が均一な剛性を有する場合の地盤バネ定数を求めた。しかしながら、構造物周辺を地盤改良する場合などでは、地盤の剛性が均一にならず結果として地盤バネ定数が異なってくることも考えられる。以下では、この線状地中構造物周辺の剛性増大の影響を検討するため、図-5に示すように構造物周辺に剛性の異なる領域を設けた二層系地盤に対して軸方向の地盤バネ定数を検討する。

内側の層の変位 w_1 および外側の層の変位 w_2 は、式(8)を参照して、式(15)および(16)のように置くことができる。

$$w_1 = c_1 \log r + c_2 \quad (15)$$

$$w_2 = c_3 \log r + c_4 \quad (16)$$

ここに、 c_1, c_2, c_3 および c_4 は r に依らない定数であり、次の4つの境界条件より決定される。

- ① 変位 w_1 について $r=b$ で $G_1 \partial w_1 / \partial r = -p$
- ② 変位 w_2 について $r=a$ で $w=0$
- ③ $r=b_1$ で $w_1 = w_2$
- ④ $r=b_1$ で $G_1 \partial w_1 / \partial r = G_2 \partial w_2 / \partial r$

ここに、 G_1 および G_2 はそれぞれ内側および外側の層のせん断弾性係数である。

以上より、内側の層の変位 w_1 が式(17)のように求められる。

$$w_1 = bp \left\{ (1/G_1) \log(b_1/r) - (1/G_2) \log(b_1/a) \right\} \quad (17)$$

したがって、二層系に対する地盤バネ定数 k は

$$k_1^* = 2\pi bp / (w_1)_{r=b} = \frac{2\pi G_2}{(G_2/G_1) \log(b_1/b) - \log(b_1/a)} \quad (18)$$

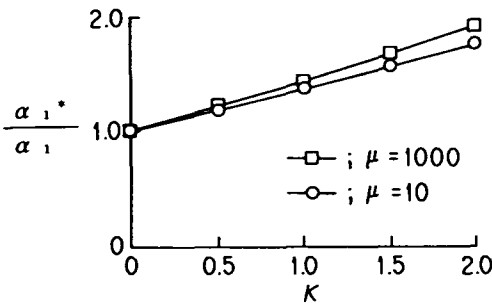


図-6 二層系モデルでの地盤バネ定数増加の影響 (軸方向)

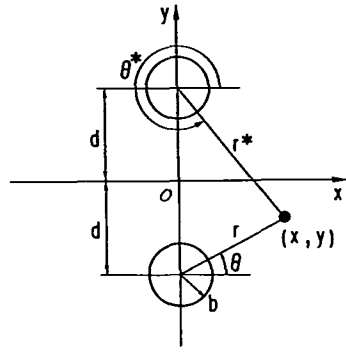


図-7 解析モデルの座標系 (地表面考慮)

したがって、二層系での軸方向地盤バネ定数が式(19)のように得られる。

$$k_1^* = \alpha_1^* G_2, \quad \alpha_1^* = \frac{2\pi}{(1-\mu)/\mu \cdot \log(1+\kappa) + \log \lambda} \quad (19)$$

ここに、 $\mu = G_1/G_2$, $\kappa = (b_1 - b)/b$, $\lambda = a/b$ であり、 μ , κ および λ は、それぞれ内側の層と外側の層のせん断弾性係数の比、内側の層の厚さの地中構造物半径に対する比および変位がゼロとなる半径の地中構造物半径に対する比である。

さらに、一層系の場合、式(14)より $\alpha_1 = 2\pi / \log \lambda$ であるから式(20)を得る。

$$\frac{\alpha_1^*}{\alpha_1} = \frac{1}{1 + (1-\mu)/\mu \cdot \log(1+\kappa) / \log \lambda} \quad (20)$$

図-6 に、式(20)に基づき λ を10に固定したときの α_1^*/α_1 と κ の関係を示した。図-6によれば、 κ が2程度までであれば、地盤バネ定数の増加が、1.2~1.9倍程度になることや、 μ の値にはほとんど依存しないことがわかる。

(5) 地表面の影響

(3)および(4)では、地表面の影響は無視し、地盤を無限弾性体と仮定して地盤バネ定数を算定した。しかしながら、線状地中構造物の半径にくらべて土破りが小さくなる場合は、地表面の影響を無視できなくなると考えられる。以下では、地表面の影響を考慮した地盤バネ定数を評価する。

a) 応力と変位の算定

地表面の境界条件を考慮するため図-7に示すように、地表面をx軸にとり(0, -d)に正規の円孔を、(0, d)に鏡像を配置する。

円孔の内部に一様なせん断応力p(紙面直角方向)を作用させた時に、地盤に発生する応力は、式(5)、(8)および(9)より

$$\tau_{xz} = -bp/r, \quad \tau_{z\theta} = 0 \quad (21)$$

また、直角座標系での応力 τ_{xz} , τ_{yz} と極座標系での応力 $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$ との関係から

$$\tau_{xz} = \tau_{r\theta} \cos \theta - \tau_{z\theta} \sin \theta \quad (22a)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{r\theta} \sin \theta + \tau_{z\theta} \cos \theta \quad (22b)$$

式(21)および(22)より

$$\tau_{xz} = -bp/r \cdot \cos \theta, \quad \tau_{yz} = -bp/r \cdot \sin \theta \quad (23)$$

また、鏡像によって発生する応力 τ_{xz}^* および τ_{yz}^* は、式(23)と同様に式(24)で表される。

$$\tau_{xz}^* = -bp/r^* \cdot \cos \theta^*, \quad \tau_{yz}^* = -bp/r^* \cdot \sin \theta^* \quad (24)$$

式(23)および(24)より、鏡像との合成応力 τ_{xz}' および τ_{yz}' が式(25)で表される。

$$\tau_{xz}' = \tau_{xz} + \tau_{xz}^* = -bp \left(\frac{\cos \theta}{r} + \frac{\cos \theta^*}{r^*} \right) \quad (25a)$$

$$\tau_{yz}' = \tau_{yz} + \tau_{yz}^* = -bp \left(\frac{\sin \theta}{r} + \frac{\sin \theta^*}{r^*} \right) \quad (25b)$$

x軸上で $r=r^*$ および $\theta = 2\pi - \theta^*$ であることを考慮すれば、式(25)より、x軸上で $\tau_{yz}' = 0$ となることが確認できる。すなわち、x軸上において地表面での応力の境界条件を満足していることがわかる。

式(3)と同様に、変位wと応力との関係として式(26)が成立する。

$$\tau_{xz}' = G \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{yz}' = G \frac{\partial w}{\partial y} \quad (26)$$

ここで、 $r = \sqrt{x^2 + (y+d)^2}$, $r^* = \sqrt{x^2 + (y-d)^2}$

$$\cos \theta = x / \sqrt{x^2 + (y+d)^2},$$

$$\cos \theta^* = x / \sqrt{x^2 + (y-d)^2},$$

$$\sin \theta = (y+d) / \sqrt{x^2 + (y+d)^2},$$

$$\sin \theta^* = (y-d) / \sqrt{x^2 + (y-d)^2}$$

を考慮すれば、式(25)および(26)より式(27)を得る。

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{pb}{G} \left\{ \frac{x}{x^2 + (y+d)^2} + \frac{x}{x^2 + (y-d)^2} \right\} \quad (27a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{pb}{G} \left\{ \frac{y+d}{x^2 + (y+d)^2} + \frac{y-d}{x^2 + (y-d)^2} \right\} \quad (27b)$$

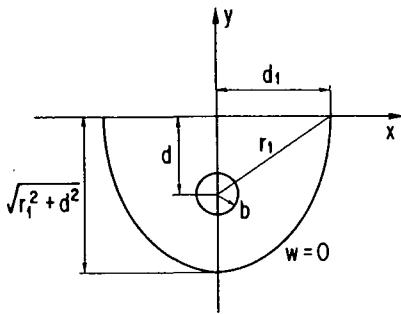


図-8 変位の境界条件

式(27a)および(27b)の両辺をそれぞれxおよびyで積分すれば

$$w = -\frac{pb}{G} \left\{ \int \frac{x}{x^2+(y+d)^2} dx + \int \frac{x}{x^2+(y-d)^2} dx \right\} + f_1(y) \quad (28a)$$

$$w = -\frac{pb}{G} \left\{ \int \frac{y+d}{x^2+(y+d)^2} dy + \int \frac{y-d}{x^2+(y-d)^2} dy \right\} + f_2(x) \quad (28b)$$

式(28a)と(28b)は同一の関数であるから、右辺の $f_1(y)$ および $f_2(x)$ は定数でなければならない。さらに、積分公式

$$\int \frac{t}{t^2+a^2} dt = \frac{1}{2} \log(t^2+a^2)$$

を用いて、式(29)が得られる。

$$w = -\frac{pb}{2G} \log\{x^2+(y+d)^2\} \{x^2+(y-d)^2\} + C \quad (29)$$

(C : 積分定数)

ここで、積分定数を決めるための変位の境界条件として、地表面上において構造物中心から d_1 だけ水平に離れた位置で変位がゼロすなわち

$$x=d_1, y=0 \text{ で } w=0$$

を指定する(図-8参照)。このとき、

$$C = pb/2G \cdot \log(d^2+d_1^2)^2 \quad (30)$$

式(29)および(30)より、変位 w が式(31)で得られる。

$$w = \frac{pb}{2G} \log \frac{(d^2+d_1^2)^2}{\{x^2+(y+d)^2\} \{x^2+(y-d)^2\}} \quad (31)$$

すなわち

$$w = \frac{pb}{G} \log \frac{r_1^2}{r \cdot r^*} \quad (32)$$

ここに

r_1 : 構造物中心から、地表面上で変位がゼロとなる点までの距離 ($r_1^2 = d^2 + d_1^2$)

r : 構造物中心からの距離

r^* : 鏡像中心からの距離

式(32)より、変位がゼロとなる曲線を求める。 $w=0$ のとき

$$r \cdot r^* = r_1^2 \quad (33)$$

すなわち

$$(x^2+y^2+d^2)^2 = 4d^2y^2+r_1^4 \quad (34)$$

式(34)は、Cassiniの楕形¹¹⁾と呼ばれ、 $r_1 > \sqrt{2}d$ のとき楕円に近い形をしている。

b) 平均変位と合応力の算定

地中構造物に働く力と変位の関係から地盤バネ定数を求める。

ところで、上述の式(31)あるいは(32)で表される変位解は地表面上の応力境界条件は満足しているが、円形の地中構造物周辺での変位および応力の境界条件が、一定変位および一定応力の状態から乱されたものになっている。そこで、変位は構造物周りの平均値で、応力は構造物周りに積分した値で評価するものとする。

構造物周りで平均をとった変位 w_0 は、式(32)より

$$w_0 = \frac{1}{2\pi b} \int_0^{2\pi} (w)_{r=r_1} \cdot b \cdot d\theta \\ = \frac{pb}{2\pi G} \int_0^{2\pi} \log \frac{r_1^2}{b \cdot (r^*)_{r=r_1}} \cdot d\theta \quad (35)$$

図-7を参照し、構造物中心、鏡像中心および点(x, y)で作られる三角形に余弦定理を適用することにより

$$(r^*)_{r=r_1} = \sqrt{(b^2+4d^2-4db\sin\theta)} \quad (36)$$

が得られ、式(35)から

$$w_0 = \frac{pb}{2\pi G} \int_0^{2\pi} \log \sqrt{(1+4\beta^2-4\beta\sin\theta)} \cdot d\theta \quad (37)$$

ここに、 $\lambda = r_1/b$ 、 $\beta = d/b$ である。ここで、積分

$$\int_0^{2\pi} \log \sqrt{(1+4\beta^2-4\beta\sin\theta)} \cdot d\theta = 2\pi \log 2\beta$$

を考慮し、式(38)が得られる。

$$w_0 = \frac{pb}{G} \log \frac{\lambda^2}{2\beta} \quad (38)$$

次に、構造物周辺の応力について評価する。極座標系と直角座標系の応力の変換式より

$$\tau_{z,r'} = \tau_{z,x'} \cos\theta + \tau_{z,y'} \sin\theta \quad (39)$$

式(25)および(39)を用い、さらに $\cos\theta^* = r/r^* \cdot \cos\theta$ および $\sin\theta^* = (r\sin\theta - 2d)/r^*$ を考慮すれば、式(40)が得られる。

$$\tau_{z,r'} = -bp \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{(r^*)^2} (r-2d\sin\theta) \right\} \quad (40)$$

したがって、構造物周りの応力 $(\tau_{z,r'})_{r=r_1}$ を周方向に積分して得られる合力 P は、式(41)で表される。

$$P = \int_0^{2\pi} (\tau_{z,r'})_{r=r_1} \cdot b \cdot d\theta \\ = -pb \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + \frac{b}{(r^*)_{r=r_1}^2} (b-2d\sin\theta) \right\} d\theta \quad (41)$$

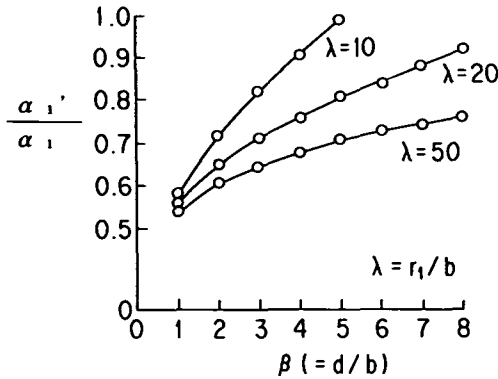


図-9 地表面の影響による α_1' への影響

ここで、式(36)を考慮すれば、式(42)が得られる。

$$P = -pb \int_0^{\pi} \left\{ 1 + \frac{1-2\beta \sin \theta}{1+4\beta^2-4\beta \sin \theta} \right\} d\theta \quad (42)$$

さらに、積分

$$\int_0^{\pi} \frac{1-2\beta \sin \theta}{1+4\beta^2-4\beta \sin \theta} d\theta = 0$$

を考慮し、式(43)を得る。

$$P = -2\pi pb \quad (43)$$

c) 地表面の影響を考慮した地盤バネ定数

以上より、地表面の影響を考慮した地盤バネ定数 k_1' は、式(38)および(43)より式(44)で表される。

$$k_1' = \frac{-P}{w_0} = \frac{2\pi G}{\log(\lambda^2/(2\beta))} \quad (44)$$

すなわち

$$k_1' = \alpha_1' G \quad (45a)$$

$$\alpha_1' = \frac{2\pi}{\log(\lambda^2/(2\beta))} \quad (45b)$$

地表面の影響を無視したとき、 $\alpha_1 = 2\pi / \log \lambda$ であるから、式(46)が得られる。

$$\frac{\alpha_1'}{\alpha_1} = \frac{1}{2 - (\log 2\beta) / (\log \lambda)} \quad (46)$$

図-9に、 $\lambda (=r_1/b)$ をパラメータとして変化させたときの α_1' / α_1 と $\beta (=d/b)$ の関係を示す。式(46)および図-9より、 $\beta = \lambda/2$ のとき $\alpha_1' / \alpha_1 = 1$ となること、また構造物半径に対する構造物の埋設深さが小さくなるにつれて、 α_1' の値が減少し地表面付近 ($\beta = 1$) で地表面の影響を無視した場合の約1/2になることがわかる。

したがって、地表面を考慮した場合の地盤バネ定数は、地中構造物の深さに応じ、地表面を考慮しない場合の地盤バネ定数の1/2~1倍となるが、地表面を考慮しない場合の結果(図-4参照)と合わせて考えれば、従来の耐震設計で用いられている値と等オーダーである。

なお、図-9で β を大きくしたとき α_1' / α_1 が1.0

の値に漸近しないのは、地表面を考慮しない場合とする場合で λ の定義と変位ゼロの曲線形状が異なり、地表面考慮の場合で λ を固定して β を大きくしたときに変位ゼロの曲線が地中構造物に近づいてくるためと考えられる。

(6) 既往の研究との比較

埋設管など線状地中構造物の地盤バネ定数を理論的に考察した既往の研究に、後藤ら¹²⁾ および鶴飼ら¹³⁾ の研究がある。両者の研究とも地中埋設管と地盤の相互作用系に対して弾性波動論を適用し、埋設管の動的な地盤バネ定数を埋設管の半径に対する地震動波長の比で整理することにより考察を行っている。本報の検討では、静的な応答変位法に用いる静的なバネを求めており、上記既往の結果と直接の比較はできないが、設計に用いる静的バネの妥当性という観点から有用であると考え、鶴飼らの結果と本報の結果の定性的な比較を行った。

鶴飼ら¹³⁾ によれば、軸方向の無次元化した動的な地盤バネ定数(動的な地盤バネ定数を $2\pi G$ で割った値であり、静的な場合は本報の α_1 を 2π で割ったものに相当)は、波長の管半径に対する比、地盤のポアソン比、入射角および波速の地盤せん断波速度に対する比によって定められ、波長の管半径に対する比を横軸にしたグラフで整理されている。それによれば、地盤バネ定数の値は上記パラメータにより変動するものの、波長の管半径に対する比が $10 \sim 10^4$ の範囲で、無次元化した動的な地盤バネの値がおおよそ0.7~0.1になることが示されている。したがって、 α_1 に相当する値は、0.63~4.4 となり、 λ が10のときの値2.7と等オーダーとなっていることがわかる。

3. 軸直角方向の地盤バネ定数の評価

(1) 円孔に強制変位を作用させた時の応力関数の誘導

図-10に示すような半径 b の円孔に対して、円孔周辺に強制変位 (x - y 面内) を作用させ、半径 a の位置で変位をゼロに指定した時の平面応力状態での解は、以下の手順で求めることができる。

一般に、二次元弾性問題では、二つの複素応力関数を所定の境界条件を満足するように決定する問題に帰着する⁸⁾。図-10に示すような問題に対して、複素応力関数 $\phi(z)$ および $\psi(z)$ は、式(47)および(48)のように表される¹⁴⁾。

$$\phi(z) = Lz \log z + M \log z + \sum A_n z^n \quad (47)$$

$$\psi(z) = Nz \log z + K \log z + \sum B_n z^n \quad (48)$$

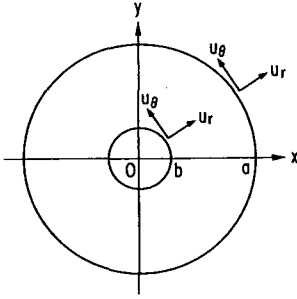


図-10 円孔の解析モデル (軸直角方向)

ここに、 L は実数定数、 M, N, K, A_n および B_n は複素定数である。なお、 $z=x+iy$ であり、 $\phi(z)$ および $\bar{\phi}(\bar{z})$ は、式(49)で示される重調和方程式を満足するエアリーの応力関数 $F(x, y)$ と式(50)の関係がある。

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (49)$$

$$F(x, y) = \text{Re} [\bar{z}\phi(z) + \psi(z)] \quad (50)$$

円孔周りのクイチガイのない条件として

$$L=0 \quad (51)$$

$$(3-\nu)M + (1+\nu)\bar{N} = 0 \quad (52)$$

変位と応力関数との関係は

$$u_r - iu_\theta = \frac{1}{2G} \left[\frac{3-\nu}{1+\nu} \bar{\phi}(z) - \{z\phi'(z) + \psi'(z)\} \right] e^{i\theta} \quad (53)$$

ここに、 u_r, u_θ はそれぞれ半径方向と周方向の変位であり、 G, ν はそれぞれせん断弾性係数とポアソン比である。また、 $r=a$ と $r=b$ での境界条件は、式(54)および(55)で与えられるものとする。

$$r=a; z=ae^{i\theta} \text{で}$$

$$u_r - iu_\theta = \bar{a}_0 + \Sigma (\bar{a}_n \cos n\theta + \bar{b}_n \sin n\theta) \quad (54)$$

$$r=b; z=be^{i\theta} \text{で}$$

$$u_r - iu_\theta = \bar{c}_0 + \Sigma (\bar{c}_n \cos n\theta + \bar{d}_n \sin n\theta) \quad (55)$$

式(47), (48), (51), (52)および(53)を用いて、 $r=b$ ($z=be^{i\theta}$)での変位を求め、式(55)の右辺と係数比較を行うと、式(56)が得られる。

$$-\frac{K}{b} + \frac{3-\nu}{1+\nu} A_1 b - \bar{A}_1 b = 2G\bar{c}_0 \quad (56a)$$

$$\frac{3-\nu}{1+\nu} \bar{A}_2 b^2 - \frac{B_2}{b^2} - M = 2G \frac{\bar{c}_1 + i\bar{d}_1}{2} \quad (56b)$$

$$-N(2\log b + 1) + \frac{3-\nu}{1+\nu} \bar{A}_0 - 2A_2 b^2 - B_1 = 2G \frac{\bar{c}_1 - i\bar{d}_1}{2} \quad (56c)$$

$$\frac{3-\nu}{1+\nu} \bar{A}_{n+1} b^{n+1} + (n-1)A_{-n+1} b^{-n+1} + nB_{-n} b^{-n-1} = 2G \frac{\bar{c}_n + i\bar{d}_n}{2} \quad (n \geq 2) \quad (56d)$$

$$\frac{3-\nu}{1+\nu} \bar{A}_{-n+1} b^{-n+1} - (n+1)A_{n+1} b^{n+1} - nB_n b^{n-1} = 2G \frac{\bar{c}_n - i\bar{d}_n}{2} \quad (n \geq 2) \quad (56e)$$

また、 $r=a$ ($z=ae^{i\theta}$)での境界条件より、式(56)と同様な5個の方程式が得られる。ただし、 $r=a$ で変位

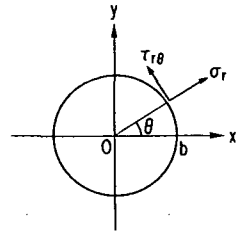


図-11 地中構造物周辺に働く応力

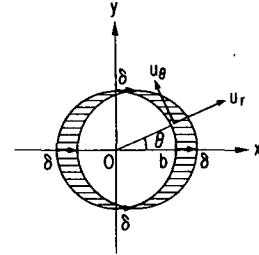


図-12 地中構造物周辺に作用させる強制変位

ゼロの条件から、複素フーリエ係数は $a_0 = a_n = b_n = 0$ ($n \geq 1$)となる。

式(56)および $r=a$ での境界条件式において、未知定数の数は、 $M, N, K, A_1, A_2, B_{-1}, \{(3-\nu)/(1+\nu) \cdot A_0 - B_1\}, A_{n+1}, A_{-n+1}, B_{-n}, B_n$ ($n \geq 2$)の11個であり、一方方程式の数は、式(52)と合わせて11個であるから以上の未知定数を求めることができる。

未知定数のうち線状地中構造物周辺の応力を算定するのに必要な M および N を書き下すと、式(57)および(58)のようになる。

$$M = \frac{G(1+\nu) \{ 2(1+\nu)b^2(\bar{c}_1 + i\bar{d}_1) + (3-\nu)(a^2+b^2)(c_1 + id_1) \}}{2 \{ (3-\nu)^2(a^2+b^2) \log(a/b) - (1+\nu)^2(a^2-b^2) \}} \quad (57)$$

$$N = \frac{-G(3-\nu) \{ 2(1+\nu)b^2(c_1 - id_1) + (3-\nu)(a^2+b^2)(\bar{c}_1 - i\bar{d}_1) \}}{2 \{ (3-\nu)^2(a^2+b^2) \log(a/b) - (1+\nu)^2(a^2-b^2) \}} \quad (58)$$

(2) 地中構造物周辺の地盤反力と地盤バネ定数の算定

図-11に示すような円形の地中構造物に働く半径方向の直応力 σ_r および周方向のせん断応力 $\tau_{r\theta}$ は、複素応力関数を用いて式(59)のように表される¹⁴⁾。

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = 2\text{Re} \left[\phi'(z) - \{ \bar{z}\phi''(z) + \psi''(z) \} e^{2i\theta} \right] \quad (59)$$

図-12に示すように、地中構造物周辺に一樣な強制変位 δ 、すなわち $u_r = \delta \cos \theta, u_\theta = -\delta \sin \theta$ を作用させたと仮定すれば、複素フーリエ係数は $c_1 = \delta$ 、

表-1 本報の方法とFEMとの比較

($G=2000\text{tf}/\text{m}^2$, $\lambda=5$)

ポアソン比 ν	本報の方法 による α_2	FEM による α_2
0.30	7.379	7.713
0.40	9.461	9.965
0.45	11.895	12.639

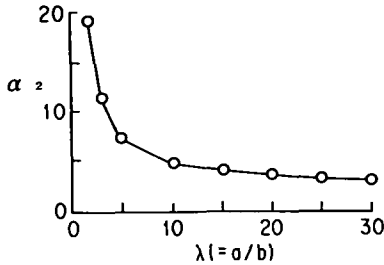


図-13 α_2 と λ の関係(軸直角方向, $\nu=0.3$)

$d_1 = -i\delta$ でそれ以外がゼロとなり, また, $K = A_1 = 0$, $A_{-n+1} = A_{n+1} = B_{-n} = B_n = 0$ ($n \geq 2$) となる.

このとき式(47), (48)および(59)から, 地中構造物周辺の応力として式(60)および(61)が得られる.

$$\sigma_r = \frac{1}{b} (3M - N + 2A_2 b^2 - \frac{2B_2}{b^2}) \cos \theta \quad (60)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{b} (M + N + 2A_2 b^2 - \frac{2B_2}{b^2}) \sin \theta \quad (61)$$

式(60)および(61)を用いて, 地中構造物に働く水平方向の反力 P_x を求めると式(62)となる.

$$P_x = b \int_0^{2\pi} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) d\theta = 2\pi (M - N) \quad (62)$$

式(57)および(58)を式(62)に代入すれば, 線状地中構造物に対する軸直角方向の地盤バネ定数 k_2 が, 式(63)のように求められる.

$$k_2 = P_x / \delta = \alpha_2' G \quad (63a)$$

$$\alpha_2' = \frac{8\pi(3-\nu)}{(3-\nu)^2 \log \lambda - (1+\nu)^2 (\lambda^2 - 1) / (\lambda^2 + 1)} \quad (63b)$$

$$\lambda = \frac{a}{b} \quad (63c)$$

以上の平面応力状態の解に対し, 平面ひずみ状態については, ν を $\nu/(1-\nu)$ に置き換えて式(64)を得る.

$$\alpha_2 = \frac{8\pi(3-4\nu)(1-\nu)}{(3-4\nu)^2 \log \lambda - (\lambda^2 - 1) / (\lambda^2 + 1)} \quad (64)$$

式(63)および(64)によれば, 地盤バネ定数 k_2 が地盤のせん断弾性係数 G およびポアソン比 ν と, 変位がゼロとなる半径と線状地中構造物の半径との比 λ に關係することがわかる.

上述の解をチェックする目的で, FEMを用い, 円形の地中構造物周辺に強制変位を与えた時の反力から地盤バネを求めた. 具体的には, 図-10の解析モデルで $b=1\text{m}$, $a=5\text{m}$ とした2次元平面ひずみ状態において, 円孔内部に単位変位を与えた時の反力を計算した. FEMには, 汎用構造解析コード ABAQUS を用いた. 表-1は, $G=2000\text{tf}/\text{m}^2$, $\lambda=5$ ($b=1.0\text{m}$, $a=5.0\text{m}$)の条件で, ポアソン比を変えた時の式(64)の値とFEMでの値を示しており, 両者がほぼ一致していることがわかる.

図-13は, ポアソン比を0.3としたとき, 式(64)で求めた α_2 と λ の關係を示している. 図-13によれば, 係数 α_2 は λ の増加に伴って減少するが, λ が10程度から α_2 の低減が小さくなることがわかる. λ が1変動したときの α_2 の変動を α_2 で割った値を α_2 の低減率と定義すれば, λ が10のとき α_2 の低減率は約5%である.

また, λ が10のとき α_2 の値は約4.9になることがわかる. この値は, 軸方向の地盤バネに対する α_1 の値より大きくなっているが, 従来の耐震設計で用いられている値の1.0ないし3.0と同程度である.

4. まとめ

本報での検討内容と結論をまとめると以下のようになる.

- ①地盤を弾性体との仮定のもとに, 線状地中構造物の軸方向および軸直角方向の地盤バネ定数の算定式を, 静的弾性論により解析的に求めた.
- ②軸方向の地盤バネ定数は, 地盤のせん断弾性係数 G および変位がゼロとなる半径 a と地中構造物の半径 b との比 $\lambda (=a/b)$ に關係する.
- ③軸直角方向の地盤バネ定数は, 地盤のせん断弾性係数 G , ポアソン比 ν および変位がゼロとなる半径 a と地中構造物の半径 b との比 $\lambda (=a/b)$ に關係する.
- ④軸方向および軸直角方向ともに, 地盤バネ定数の値は変位がゼロとなる半径と地中構造物の半径の比 λ が増加するにしたがって減少するが, λ の値が10程度からその低減が小さくなる. その低減率を, λ が1だけ変動したときの地盤バネ定数の変動を地盤バネ定数で割った値と定義すれば, λ が10のとき低減率が約5%になる.
- ⑤地盤バネ定数のせん断弾性係数に対する比 α は, λ が10のとき, 軸方向で約2.7, 軸直角方向で約4.9となる. これらは, 従来の耐震設計で用いられている値と同程度である.

⑥鵜飼らによって算定された軸方向動的地盤バネ定数の値を本報の α_1 に換算すれば、波長と管半径の比が $10\sim 10^4$ の範囲で $0.64\sim 4.4$ であり、本報の結果と等オーダーである。

⑦軸方向の地盤バネ定数について、線状地中構造物周辺の地盤改良等による剛性増加を考慮した検討によると、剛性増加範囲が地中構造物半径の2倍程度までであれば、地盤バネ定数の増加は $1.2\sim 1.9$ 倍である。

⑧軸方向の地盤バネ定数について、地表面の影響を考慮した検討によれば、構造物半径に対する埋設深さが小さくなるにつれて、 α の値が減少し地表面付近で地表面の影響を考慮しない場合の約 $1/2$ となる。

5. あとがき

本報では、線状地中構造物に対する地盤バネ定数を静的弾性論を用いて評価する一方法を示すとともに、その算定式を導入した。その結果、地盤バネ定数が変位がゼロとなる半径と地中構造物の半径の比に依存することが示された。この λ の値を定める一つの方法として地盤バネ値の低減が小さくなる時の λ の値を用いることが考えられるが、現状では現場実験等の結果を勘案して推定するのが最も妥当な方法であろう。

本報の数値的な結果は、FEMなど現在多用されている数値解析手法によっても得られるものであり、数値そのものについても線状地中構造物に対する現状の耐震設計で用いられているものとほぼ同様の結果となった。しかしながら、FEMは構造物や地盤の境界条件および材料特性などの設定に汎用性を有するものの、構造物および地盤の性質や挙動を支配する基本的なパラメータ間の関係を把握したり、設計式として一般化する場合にやや難があり、本報の方法の意義はその点にあると考えられる。

本報で算定した静的な応答変位法に用いる地盤バネは、静的な荷重と変位との関係から求められたバネである。しかしながら、地震時には地中構造物は振動状態にあるため、本報においては既往の研究との定性的な比較にとどまったものの、今後動的なバネとの差異を確認してゆく必要があると考えられる。

本報は、平成6年3月第21回関東支部技術研究発表会と平成6年9月土木学会第49回年次学術講演会での発表内容に追加・修正して作成したものである。

なお、本報の解析式の誘導および数値計算は松原が実施し、研究全体に関わる指導および議論に星谷が加わった。

参考文献

- 1) Kuesel, T. R.: Earthquake Design Criteria for Subway, *Proc. ASCE*, ST6, pp1213-1231, 1969.
- 2) 川島一彦編著：地下構造物の耐震設計，鹿島出版会，1994年6月。
- 3) 建設省土木研究所地震防災部耐震研究室，財団法人先端建設技術センター，株式会社奥村組，鹿島建設株式会社，株式会社鴻池組，清水建設株式会社，大成建設株式会社，飛鳥建設株式会社，株式会社間組，株式会社フジタ：一地下空間の建設技術の開発に関する研究—地下構造物の耐震設計技術に関する研究，平成3年度共同研究報告書，平成4年3月，1992。
- 4) 同上：平成2年度共同研究報告書，平成3年3月，1991。
- 5) 3)と同じ。
- 6) 土山茂希，中村晋：実験に基づいた洞道～地盤間の地盤バネ定数に関する研究，土木学会論文集，No 471/I-24, pp. 105-114, 1993. 7.
- 7) 土木学会編：動的解析と耐震設計，第4巻ライフライン施設，技報堂出版，1989。
- 8) Y. C. ファン：固体の力学/理論，培風館，1977。
- 9) 建設省：新耐震設計法（案），昭和52年3月，1977。
- 10) (社)日本水道協会：水道施設耐震工法指針・解説，1979年版，1979。
- 11) 森口繁一，宇田川かね久，一松信：岩波数学公式1，岩波書店，1992。
- 12) 後藤尚男，土岐憲三，高田至郎：地中埋設管の動特性について，第12回地震工学研究発表会講演概要集，pp. 103-106, 1972。
- 13) 鵜飼恵三，山口柏樹：埋設管の動的地盤ばね定数に関する理論的考察，土質工学会論文報告集（当時），Vol. 19, No. 4, pp. 93-102, 1979。
- 14) 森口繁一：2次元弾性論，岩波講座・現代応用数学，岩波書店，1957。

(1996. 5. 20 受付)

ON THE SOIL SPRING CONSTANTS FOR BURIED PIPELINE STRUCTURES

Katsumi MATSUBARA and Masaru HOSHIYA

In order to estimate the soil spring constants for the earthquake structural design of buried pipeline structures, a method using the theory of static elasticity is presented here and the equations of the constants are derived analytically. The soil spring constant in the axial direction depends on the shear modulus of the soil deposits G and the ratio λ between the radius where the displacement is zero and the radius of buried pipeline structure. The constant for the direction perpendicular to the axis of the pipeline depends on G , Poisson's ratio of the soil deposits ν and λ .