

# 時間領域での基盤入力地震動の 推定法に関する基礎的研究

酒井久和<sup>1</sup>・澤田純男<sup>2</sup>・土岐憲三<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 若築建設株式会社 (〒153 東京都目黒区下目黒二丁目 23-18), 京都大学大学院工学研究科博士後期課程

<sup>2</sup>正会員 工博 京都大学助教授 大学院工学研究科 (〒606-01 京都市左京区吉田本町)

<sup>3</sup>フェロー 工博 京都大学教授 大学院工学研究科 (〒606-01 京都市左京区吉田本町)

地表あるいは地盤内における地震観測記録から入力地震動を推定する場合、一般に、周波数領域での重複反射理論に基づく方法が採用されている。しかし、地盤を等価線形化モデルにより近似するのでは、非線形性が強く現れる強震時の推定には適さない。そこで本論文では、時間領域において運動方程式を逐次積分することによって基盤入力地震動の推定する方法を考案し、数値解析例を通じて本手法の解の精度および安定性について検討を行った。

**Key Words :** backward calculation, input ground motion, time domain, time integration, non-linear dynamic soil system

## 1. はじめに

重要土木構造物を設計する場合には、地震時の安全性を検証する目的で、地震応答解析が行われるのが通例となっているが、この場合には、地盤-構造物系の動的相互作用を的確に表現するのに、構造物と共に周辺地盤をモデル化し、さらに地盤や構造物の非線形特性も考慮した有限要素解析法が用いられる場合が多い。このような地震応答解析を行うには、基盤における入力地震動が必要となるが、この基盤入力地震動は地表あるいは地盤内の地震観測記録から推定される (Fig.1 参照)。入力地震動の推定法は、周波数領域と時間領域における推定の2通りの方法に大きく分けられる。前者はプログラム"SHAKE"<sup>1)</sup>に代表される方法で、実際の解析ではほとんどの場合この方法が用いられる。この手法は重複反射理論に基づき、地盤の非線形性は等価線形化手法により近似される。したがって、地震応答解析で非線形解析を行う際には非線形性があまり強くない場合でも、地震応答解析による地表面の波形と入力地震動の推定に用いた地震観測記録とは一致しない。当然のことながら、非線形性が強い場合には全く異なった波形となる。すなわち、地震応答解析は地震観測記録が得られた条件とは全く異なる状態に対する解析を行っていることになる。このような状況を改善するためには、地震応答解析で用いる地盤の非線形モデルと同一のモデルを用いて入力地震動の推定を行わなければならないが、このためには時間

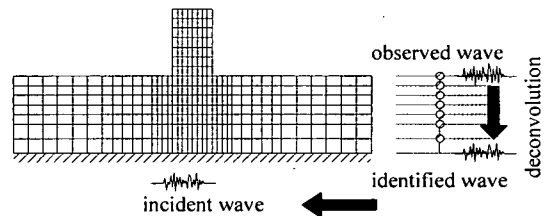


Fig.1 Procedure of soil-structural dynamic analysis

領域で推定を行う必要がある。時間領域における入力地震動の推定法に関する研究としては、例えば、土岐・佐藤・清野<sup>2)</sup>がカルマンフィルターを用いて、須藤・星谷・柳河<sup>3)</sup>は EK-WLI 法<sup>4)</sup>を用いて、3自由度構造系の入射波の同定を行っている。さらに、丸山・星谷<sup>5)</sup>は拡張カルマンフィルター<sup>6)</sup>を用いて非線形1自由度系に対する定式化を行い、入力地震動の同定を行っている。しかし、2), 3)はいずれも線形な系を対象とした定式化となっており、5)は数値解析で線形な系に対して検証を行うに留まっている。以上のように、後者の時間領域で基盤入力地震動の推定を行う方法は未だ確立されていないのが現状である。

そこで、筆者らは、基盤入力加速度を未知数とした運動方程式の定式化を行い、これを時間領域において逐次積分することにより、地表面や地盤内の地震記録から基盤入力地震動の逆算をする手法を考案した。本手法は非線形な多自由度系にも適用可能な定式化となっており、

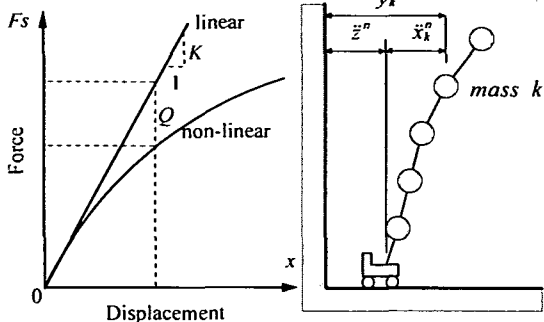


Fig.2 Nonlinear stiffness Fig.3 Concept of equation (4)

また、前述の研究のように確率的に入力動の推定を行うのではなく、数学的逆算に基づく方法である。

本論文では、まず、逆算手法について解説し、その特性について考察を加える。次に、本逆算法の解の精度や安定性について検討を行う。最後に、本逆算法の計算誤差の発生特性を利用して、解の精度を改良する方法を提案し、数値解析例を通じてその効果を示す。

## 2. 逆算方法

### (1) 運動方程式の定式化

復元力が非線形である振動系の運動方程式は次式で与えられる。

$$[M]\{\ddot{x}\}'' + [C]\{\dot{x}\}'' + \{F_s\}'' = -[M]\{i\}\ddot{z}'' \quad (1)$$

ここに、 $[M]$ 、 $[C]$ はそれぞれ質量、減衰マトリクス、 $\{F_s\}$ は復元力ベクトル、 $\{x\}$ は相対変位ベクトル、 $\{i\}$ はその成分が全て1であるベクトル、 $\ddot{z}$ は基盤入力加速度である。また、ベクトルおよびスカラーの上付の添字  $n$  はタイムステップ数、 $\cdot$  は時間に関する微分を意味する。

本研究では非線形の収束計算を荷重伝達法<sup>7)</sup>で行う。このため、復元力を Fig.2 に示すように、線形項と非線形の調整項に分けることで、式(1)を次式で書き換える。

$$[M]\{\ddot{x}\}'' + [C]\{\dot{x}\}'' + [K]\{x\}'' - \{Q\}'' = -[M]\{i\}\ddot{z}'' \quad (2)$$

ここに、 $[K]$ は剛性マトリクス、 $\{Q\}$ は非線形復元力の線形項との調整外力ベクトルで次式に表されるような  $\{x\}$  の関数である。

$$\{Q\}'' = [K]\{x\}'' - \{F_s\}'' \quad (3)$$

いま、 $n$  ステップ目のある質点  $k$  の絶対応答加速度成分  $\ddot{y}_k^n$  が測定されている場合を想定する。この場合、質点  $k$  に関して次の関係式が成立する (Fig.3 参照)。

$$\ddot{z}'' = \ddot{y}_k^n - \ddot{x}_k^n \quad (4)$$

ここで、式(4)を式(2)に代入すると次式が得られる。ただし、応答値の下付の添字は質点番号を意味する。

$$[M]\{\ddot{x}\}'' + [C]\{\dot{x}\}'' + [K]\{x\}'' - \{Q\}'' = -[M]\{i\}\ddot{y}_k^n + [M]\{i\}\ddot{x}_k^n \quad (5)$$

さらに、上式を整理することで次式を得る。

$$[M']\{\ddot{x}\}'' + [C]\{\dot{x}\}'' + [K]\{x\}'' - \{Q\}'' = -[M]\{i\}\ddot{y}_k^n \quad (6)$$

この逆算の運動方程式は、順解析の場合の運動方程式(2)と、右辺の慣性力に作用する加速度が  $\ddot{z}''$  から  $\ddot{y}_k^n$  に、左辺の質量マトリクスの部分が  $[M]$  から  $[M']$  に変化しているが、ほぼ同じ形式となっている。ここに、 $[M']$  は次式で与えられる。

$$M'_{ij} = M_{ij} - \sum_{l=1}^N M_{il}\delta_{lk} \quad (7)$$

ただし、 $M'_{ij}$ 、 $M_{ij}$  は、それぞれ、 $[M']$ 、 $[M]$  の  $i$  行  $j$  列成分、 $\delta_{lk}$  は Kronecker のデルタ、 $N$  は自由度の数である。例えば、 $n$  自由度集中質点系 (質量  $m_1, m_2, \dots, m_n$ ) で  $\ddot{y}_1$  が観測されている場合には、 $[M']$  は次式で表される。

$$[M'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_2 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ -m_3 & 0 & m_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_n & 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

### (2) 運動方程式の逐次積分方法

逆算の運動方程式は、順解析とほぼ同じ形式をとっていることから、本研究では運動方程式を逐次積分する際の時間積分法として順解析で多用されている Newmark の  $\beta$  法<sup>8)</sup>を採用する。Newmark の  $\beta$  法では応答加速度、速度、変位ベクトル間で以下の関係が仮定される。

$$\{\ddot{x}\}''^{n+1} = \{\ddot{x}\}''^n + (1-\gamma)\Delta t\{\dot{x}\}'^n + \gamma\Delta t\{\ddot{x}\}''^{n+1} \quad (9)$$

**Table 1.1** Eigen value and vectors of 2DOF free vibration system of equation (6)

eigen value ( $\lambda$ )	eigen vector $\{u\}$
$-\frac{k_1}{c_1}$	$\left\{ 1 \frac{m_2 k_1^2}{m_2 k_1^2 - c_1 c_2 k_1 + c_1^2 k_2} \right\}^T$
$-\frac{k_2}{c_2}$	$\{1 \ 1\}^T$

$$\{x\}^{n+1} = \{x\}^n + \Delta t \{\dot{x}\}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \{\ddot{x}\}^n + \beta \Delta t^2 (\{\ddot{x}\}^{n+1} - \{\ddot{x}\}^n) \quad (10)$$

ただし、 $\Delta t$  は解析ステップ間の計算時間間隔を表す。また、 $\gamma$ 、 $\beta$  は各ベクトルの関係を決める積分パラメータで、順解析では、 $\gamma$  は精度上の理由から 1/2 とするのが普通であり、この場合は線形系で少なくとも 2 次の精度が保たれる<sup>9)</sup>。他方、 $\beta$  は 0 で中央差分法、1/6 で線形加速度法、1/4 で平均加速度法と一致する。

式(9)、(10)を  $n+1$  ステップ目における式(6)に代入し、未知ベクトル  $\{\ddot{x}\}^{n+1}$  について整理すると次式が得られる。

$$\{\ddot{x}\}^{n+1} = [A]^{-1} \{b\} \quad (11)$$

ここに、

$$[A] = [M'] + \gamma \Delta t [C] + \beta \Delta t^2 [K] \quad (12)$$

$$\{b\} = \left( -[M]\{\ddot{y}\}^{n+1} + \{Q\}^{n+1} + [C](\{\dot{x}\}^n + (1-\gamma)\{\ddot{x}\}^n) + [K]\left(\{x\}^n + \Delta t \{\dot{x}\}^n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \{\ddot{x}\}^n\right) \right) \quad (13)$$

最後に式(11)で求めた  $\{\ddot{x}\}^{n+1}$  を式(9)、(10)に代入することで漸次的に  $n+1$  ステップの状態量が決定され、式(4)を用いて基盤入力加速度が計算される。ただし、復元力が非線形の場合には、式(13)中の  $\{Q\}^{n+1}$  は式(10)の  $\{x\}^{n+1}$  の関数であることから、 $\{Q\}^{n+1}$  が収束するまで繰り返し計算が必要になる。

### (3) 運動方程式の特性

前述のように、逆算の運動方程式(6)は、順解析の運動方程式(2)と質量マトリクスと右辺の外力項の部分が異なるものの、形式は非常に似たものになっている。そこで、本節では、逆算時における自由振動モードを調べる

ことで、本計算手法の計算特性に関して考察を加える。検討の対象とする系は次に示す質量、減衰、剛性マトリクスをもつ 2 自由度減衰振動系である。

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

逆算の場合の自由振動方程式は、式(6)の右辺を  $\{0\}$  と置き換えることにより得られる。この振動系の固有値および固有ベクトルはこの振動方程式の解を

$$\{x\} = \{u\} e^{\lambda t}$$

と置き、 $\{u\}$  の係数マトリクスの行列式を 0 とすることにより求めることができる<sup>10)</sup>。得られた固有値、固有モードを **Table 1.1** に表す。

自由振動の方程式の固有値は、順解析の場合、通常、複素数であり、これは初期振動状態から対応する固有モードで減衰振動することを表す。しかし、逆算の場合には、**Table 1.1** に表すように、固有値は負の実数で、しかも、通常、 $k_1$  は  $c_1$  に比べ非常に大きい<sup>11)</sup>ことから、剛体モードと他の振動モードが非振動的で急激な過減衰振動<sup>10), 12)</sup>を起こすことが分かる。以上の事項は、より多自由度の場合にも同様に当てはまる。したがって、本逆算法では、計算誤差が発生した場合に、振動系は誤差に応じて、剛体モードを含む振動モードで過減衰振動する特性があると言える。ただし、この場合、自由振動系のマトリクスは非対称であることから、固有モードは直交せず、自由度の数だけ、固有値、固有モードが存在するとは限らない<sup>13)</sup>。

参考のため、3 自由度系の場合の固有値と固有ベクトルを **Table 1.2** に表す。ただし、振動系の質量、減衰、剛性マトリクスは次に示すものとする。

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$$

Table 1.2 Eigen value and vectors of 3DOF free vibration system of equation (6)

eigen value ( $\lambda$ )	eigen vector $\{u\}$
$-\frac{k_1}{c_1}$	$\begin{Bmatrix} (m_2 k_1^2 - c_1 c_2 k_1 + c_1^2 k_2) \\ (m_3 k_1^2 - c_1 c_3 k_1 + c_1^2 k_3) \\ + m_2 (c_1 k_2 - c_2 k_1) c_1 k_1^2 \\ (m_2 + m_3) (c_1 k_2 - c_2 k_1) c_1 k_1^2 \\ + m_2 m_3 k_1 \\ (m_2 + m_3) (c_1 k_2 - c_2 k_1) c_1 k_1^2 \\ + m_2 (m_3 k_1^2 + c_1 k_3 - c_3 k_1) k_1^2 \end{Bmatrix}$
$-\frac{k_2}{c_2}$	$\left\{ 1 \quad 1 \quad \frac{m_3 k_2^2}{m_3 k_2^2 - c_2 c_3 k_2 + c_2^2 k_3} \right\}^T$
$-\frac{k_3}{c_3}$	$\{1 \quad 1 \quad 1\}^T$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

### 3. 逆算精度の検討

線形な振動系の時間積分法の安定性を示す手法として、モーダルアナリシスに基づく方法<sup>14)</sup>、z 変換を利用する方法<sup>15)</sup>等が挙げられる。しかし、逆算の運動方程式(6)の[M']が非対称なマトリクスであり、固有ベクトルの直行性を利用できないため前者の方法は適用できず、また、後者の方法も、[M']は逆マトリクスが存在しない上、LU 分解も不可能であることから適用できない。したがって、本論文では、本解析手法における解の安定性および精度の検証を数例の数値解析を実施することにより行う。

解析は、振動系の材料特性が全て既知で、解析モデルの任意質点の絶対応答加速度だけが観測されている場合を想定して、入射波の推定を行う。ただし、観測波は設定した入射波を基盤面に入射し、Newmark の $\beta$ 法の $\gamma=1/2$ 、 $\beta=1/4$ で、計算時間間隔を逆算と同じ $\Delta t$ を用いて、順解析により求めている。

本章ではまず、6 自由度線形モデルに周期 0.4 秒の正弦波を 1 波入射した場合について、式(12)、(13)のパラメータ $\beta$ 、 $\Delta t$ および観測位置を数種類変化させて解析を行う。次に、実際の地震波として、El Centro (1940)の

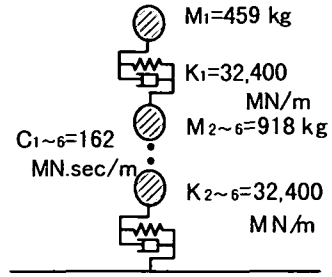


Fig. 4.1 Linear 6DOF model

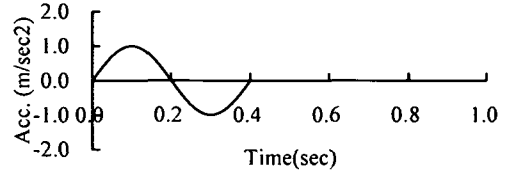


Fig. 4.2 Input acceleration (target)

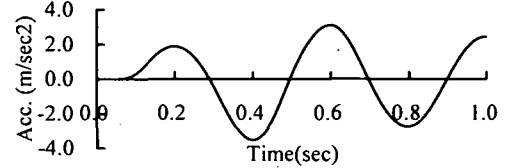


Fig. 4.3 Absolute response acceleration on ground surface calculated by the forward analysis

NS成分を同じ6 自由度線形系に入射した場合、さらに、3 自由度非線形系に周期 0.4 秒の正弦波を 1 波入射した場合について、入射波の推定を行い、それぞれ、考察を加える。ただし、本論文の数値解析は全て倍精度で行い、以降の計算例中表示する最大計算誤差を次のように定義する。

$$\text{最大計算誤差} = \frac{|\text{推定値} - \text{厳密解}|_{\max}}{\text{厳密解の最大値}}$$

#### (1)積分パラメータ $\beta$ の影響

解析モデルは Fig. 4.1 の 6 自由度線形モデルで、その材料特性を図中に併記する。入力加速度は周期 0.4 秒の正弦波で、継続時間は 1 秒、観測波は最上質点における絶対応答加速度を採用する。Fig. 4.2、Fig. 4.3 にそれぞれの加速度波形を示す。

積分パラメータ $\beta$ と解析精度の関係を調べる目的で、 $\Delta t=1/1,000$ 、 $\gamma=1/2$ で、 $\beta=1/2, 1, 2, 3, 10, 20$ の 6 種類で入射波の推定を行う。解析により推定された入射波形を Fig. 4.4 に、推定波形の最大計算誤差を Table 2.1 に示す。

Fig. 4.4 より、 $\Delta t$ が 1/1,000 秒では、積分パラメータ $\beta=1/2$ の場合に、解析初期の数ステップから解の発散が生じ、また、 $\beta=1$ の場合には、推定波がほぼ厳密解

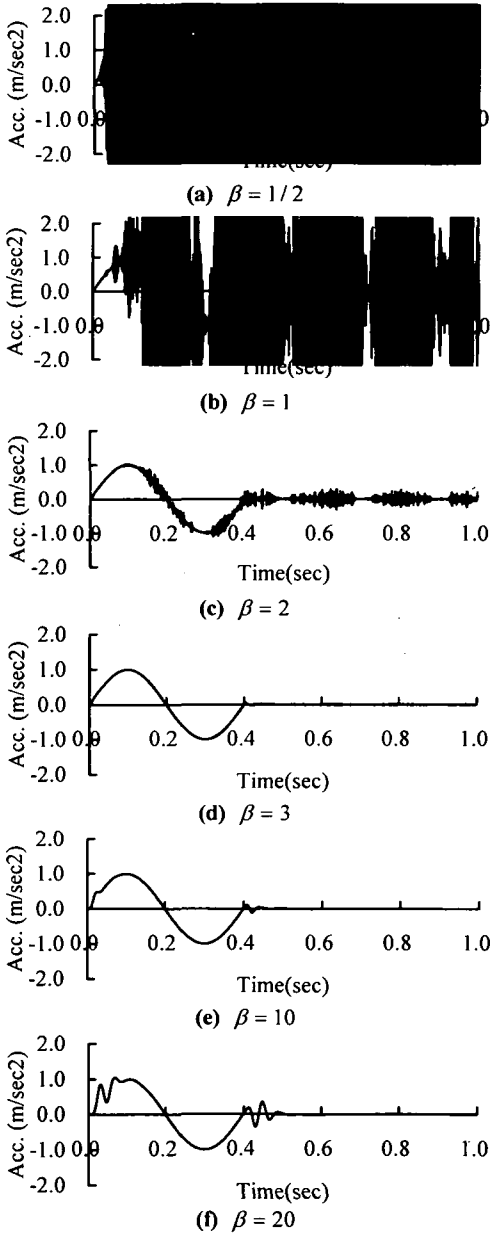


Fig.4.4 Effect of  $\beta$  on identified input acceleration

を中心に大振幅で高周波振動し、推定が行えない。一方、 $\beta=2$  の場合には、高振動成分の振幅がかなり抑制され、さらに、 $\beta=3$  の場合には、ほとんど高振動成分が見られない。順解析の場合には、一旦解が発散し始めると一方的に解が大きくなる（または小さくなる）。しかし、逆算の場合には、前章で述べたように解いている系が過減衰特性を持つため、何らかの理由で解に誤差が生じて時間とともに正解に近づく傾向が見受けられる。Table 2.1 より、 $\beta=3$  のケースについては計算誤差の最大が数%と非常に高精度の入射波の推定が行えていることが分

Table 2.1 Effect of  $\beta$  on maximum calculation error of identified input acceleration

$\beta$	calculation error (%)
1/2	997271.0
1	3124.2
2	31.9
3	5.1
10	12.8
20	38.1

Table 2.2 Maximum difference between several calculated and the approximate response accelerations

$\beta$	maximum difference (%)		
	$\Delta t=1/10,000$	$\Delta t=1/1,000$	$\Delta t=1/100$
0	0	$2.3 \times 10^{-2}$	2.5
1/6	$3.8 \times 10^{-4}$	$1.9 \times 10^{-2}$	1.8
1/4	$5.7 \times 10^{-4}$	$3.8 \times 10^{-2}$	3.6
1/2	$1.1 \times 10^{-3}$	$9.5 \times 10^{-2}$	8.6
1	$2.3 \times 10^{-3}$	$2.1 \times 10^{-1}$	18
2	$4.5 \times 10^{-3}$	$4.3 \times 10^{-1}$	36
10	$2.3 \times 10^{-2}$	2.2	112
100	$2.3 \times 10^{-1}$	20	109

かる。

通常、順解析による時刻歴応答解析では、Newmark の  $\beta$  法の積分パラメータ  $\beta$  を 0 から 1/4 までの値を採用して解析を行う。これは順解析で  $\beta$  が 1/4 を越える値を設定すると時刻歴応答の減衰が過大になり、解析精度が悪くなると考えられているためである。このことを検証する目的で、順解析における応答加速度の解析精度と  $\beta$  および  $\Delta t$  の関係を調べる。検討は、前述の 6 自由度線形系に、El Centro (1940) の NS 成分を 20 秒間入射するケースについて行い、Table 2.2 に最上質点における応答加速度の  $\beta=0$ 、 $\Delta t=1/10,000$  の解を正解とした場合の計算誤差を示す。ただし、この系の最短の固有周期は 5/100 秒である。Table 2.2 に示すように、 $\Delta t=1/100$  のケースでは、 $\beta=0 \sim 1/4$  を採用した場合には、高精度であるが、さらに大きな  $\beta$  では急激に解析精度が悪化する。しかし、 $\Delta t=1/10,000$  や  $1/1,000$  のように、系の最短固有周期に対して、十分小さな  $\Delta t$  であれば、 $\beta$  を 10 程度に設定しても、十分な精度が期待できることが分かる。逆算の場合についても同様に、系の最短固有周期に対して十分小さな  $\Delta t$  を採用した場合には、多少大きな  $\beta$  でも正しく逆算できるものと解釈できる。しかし、Fig.4.4 に示すように、さらに過大な  $\beta$  を設定すると、加速度、速度、変位間の近似精度の悪化から、低周波の計算誤差が顕在化してくるものと考えられる。

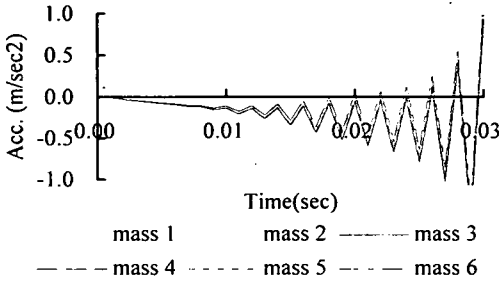
一方、小さな  $\beta$  では逆算時に解が発散する理由として、

**Table 2.3** Effect of  $\beta$  on condition number of coefficient matrix,  $[A]$  in equation (12)

$\beta$	condition number
1/2	$716 \times 10^9$
1	$290 \times 10^9$
2	$669 \times 10^8$
3	$209 \times 10^8$
10	$201 \times 10^6$
20	$860 \times 10^4$

**Table 2.4** Effect of  $\Delta t$  on condition number of coefficient matrix,  $[A]$  in equation (12), and maximum calculation error of identified input acceleration

$\Delta t$ (sec)	$\beta$	condition number	calculation error (%)
1/10,000	400	$934 \times 10^8$	5.9
1/5,000	90	$115 \times 10^9$	5.4
1/2,000	14	$489 \times 10^8$	5.3
1/1,000	3	$209 \times 10^8$	5.1
1/500	0.9	$162 \times 10^7$	5.0
1/200	0.4	$861 \times 10^4$	5.1
1/100	0.3	$117 \times 10^3$	5.8
1/50	0.26	$248 \times 10^1$	6.1



**Fig.4.5** Calculation errors of relative response accelerations ( $\beta=1/2$ )

**Table 2.5** Effect of observed location on condition number of coefficient matrix,  $[A]$  in equation (12)

observed mass number	condition number
1	$716 \times 10^9$
2	$757 \times 10^7$
3	$801 \times 10^5$
4	$846 \times 10^3$
5	$895 \times 10^1$
6	$95 \times 10^0$

式(11)の計算が遂行できない点が挙げられる。ここで、式(12)の $[A]$ の条件数を **Table 2.3** に示す。条件数<sup>(13),(16)</sup>とは、誤差の入りやすさを表す指標であり、この値が大きくなると、マトリクスがランク落ちしていると判断される。このケースでは、 $\beta$ が1以下で $10^9$ のオーダー、2以上なら $10^8$ のオーダーとなっており、本逆算手法はランク落ち寸前のところで解析が行われていると解釈できる。ただし、条件数は通常、最大固有値と最小固有値の比で示されるが、本手法のように非対称マトリクスの場合には、ピボットの絶対値の最大値と最小値の比で近似される。

さらに、 $\beta=1/2$ の場合における各質点の絶対応答加速度と厳密解との差の時刻歴を **Fig.4.5** に示す。すなわち、推定された相対加速度中の高周波のノイズは、ほぼ剛体モードであることが分かる。

### (2) 計算時間間隔 $\Delta t$ の影響

次に、計算時間間隔と解析精度の関係を調べるために、1/10,000 秒から 1/50 秒までの数種類の  $\Delta t$  を用いて解析を行う。この場合の  $\beta$ 、条件数、最大計算誤差を **Table 2.4** に表す。ここに、積分パラメータは、 $\gamma=1/2$  で、 $\beta$  は有効数字 1 桁程度で計算誤差が最小となるように求めた。ただし、 $\Delta t=1/50$  のケースにおける  $\beta=1/4$  は、計算誤差が最小となるが、継続時間を伸長すれば発散するため除外している。

**Table 2.4** より、 $\Delta t$  が 1/50 の場合には、0.26 とかなり

小さい  $\beta$  を採用しても、条件数がそれほど大きくないために高精度の推定が可能である。また、 $\Delta t$  が 1/100 以下の場合には、 $\Delta t$  に応じて最適な  $\beta$  が存在し、いずれの  $\Delta t$  を用いても計算誤差が数%の高精度な推定ができることが分かる。ただし、この場合、**Table 2.4** に示すように、 $\Delta t$  を小さく設定すれば  $\beta$  を大きくしなければならぬし、大きな  $\Delta t$  を採用すれば  $\beta$  を小さくしなければ解の精度は見込めない。これは、式(12)で  $[A]$  の条件数が右辺第2項と第3項に大きく影響されるためである。すなわち、 $\Delta t$  が小さくなると、 $[A] \approx [M']$  となるが、この場合明らかにランク落ちになる。これを防ぐためには  $\Delta t$  が小さくなるに従って  $\beta$  を大きくすればよい。また、 $\beta$  を小さく設定すると、高周波ノイズによる発散性が強くなる。ちなみに、 $\Delta t$  が 1/50 の場合、 $\beta$  が 1/4 以下では高周波ノイズの減衰性が小さいため、推定波が発散する。

### (3) 観測位置の影響

最上質点以外の質点で絶対応答加速度が観測された場合において、式(12)の $[A]$ マトリクスの条件数を **Table 2.5** に表す。ただし、式(12)、(13)中のパラメータは、 $\Delta t=1/1,000$ 、 $\gamma=1/2$ 、 $\beta=1/2$  で、表中の質点番号は上の質点から順番に番号付けしている。

**Table 2.5** より、基盤に近い質点の絶対応答加速度が観測されている場合、最上質点が観測点となっている場

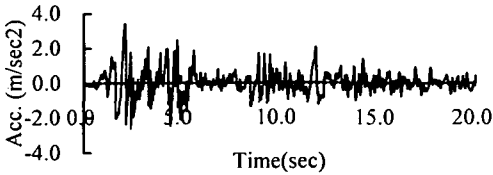


Fig.5.1 Input acceleration (target)

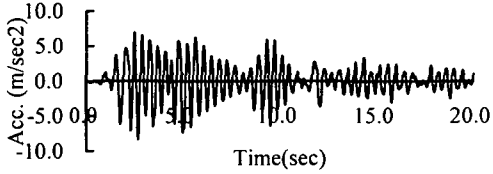


Fig.5.2 Absolute response acceleration calculated by the forward analysis

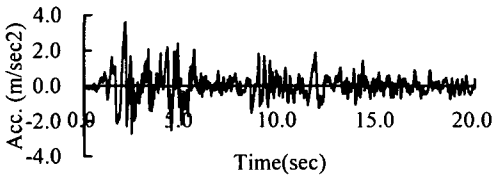
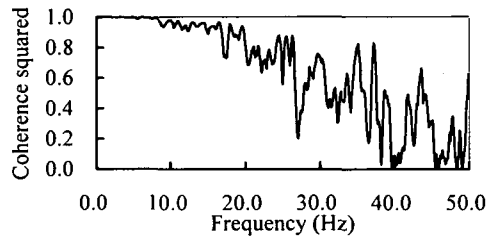
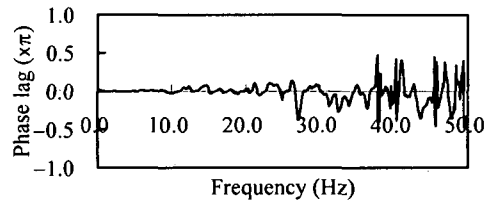


Fig.5.3 Identified input acceleration ( $\beta = 2$ )



(a) Coherence squared function



(b) Phase lag function

Fig.5.4 Correlation between identified and input acceleration

合に比べて、条件数がかかるかに小さくなる事が分かる。したがって、本手法による入射波の推定では、観測点が基盤に近いほど解析精度が向上する。例えば、Fig.4.1の6自由度系を下方に延長した20自由度線形系では、最上質点が観測点の場合には、解析のはじめの数ステップで発散するのに対し、最下質点が観測点になっている場合、最大計算誤差0.1%と非常に高精度の入射波の推定が可能である。

#### (4) 実際の地震波に対する適用性

前節では線形モデルに対する本手法の適用性を正弦波入射の場合について検討を行ったが、本節では実際の

Table 3 Effect of  $\beta$  on maximum calculation error of identified input acceleration

$\beta$	calculation error (%)
1	1554.4
2	13.0
3	5.7
4	102.5

地震波に対する適用性について検討する。

解析対象は、Fig.4.1に示す解析例1と同じモデルに、Fig.5.1に示すEl Centro(1940)のNS成分を20秒間基盤面に入射した場合を想定し、観測波はFig.5.2に示す最上質点の絶対応答加速度を採用する。

解析は、 $\Delta t = 1/1,000$ 、 $\gamma = 1/2$ 、 $\beta = 1, 2, 3, 4$ の4ケースについて行う。推定された入射波の最大計算誤差をTable 3に、 $\beta = 2$ の場合の時刻歴波形および厳密解とのコヒーレンスと位相差をそれぞれFig.5.3, Fig.5.4(a), (b)に示す。

積分パラメータ $\beta = 2$ の場合、Fig.5.4(a), (b)より、推定波は高周波側で厳密解との相関は悪くなるが、低高周波側では振幅、位相とも高精度であり、時間波形で見ても、Fig.5.3に示すように精度良い近似が行える。また、 $\beta = 3$ の場合には、Table 3に表すように、計算誤差が数%とさらに高精度の近似が可能である。

#### (5) 非線形モデルに対する適用性

これまでの解析例では、解析モデルとして復元力が線形な系を対象に検討を行ったが、本節では、復元力が非線形な解析モデルを対象に逆算精度の検討を行う。

解析の対象は、非線形の復元力特性が修正Hardin-Dmevichモデル<sup>17)</sup>の3自由度非線形モデルであり、その材料特性および復元力特性をFig.6.1, 6.2に示す。入力加速度は周期0.4秒の正弦波で、観測波は最上質点における絶対応答加速度を採用する。Fig.6.3, 6.4にそれぞれの加速度波形を示す。

解析は、 $\Delta t$ が1/50から1/10,000までの8種類について、継続時間1秒で行う。 $\Delta t = 1/50, 1/100, 1/1,000, 1/10,000$ の4ケースの推定入射波をそれぞれ、Fig.6.5(a)~(d)に示す。さらに、推定加速度に発生する高周波ノイズを除去する目的で、推定加速度結果を25Hzまでのローパスフィルターに通す。Table 4.1に、この場合の推定波の最大計算誤差を、逆算に採用した $\beta$ 、式(12)の[A]の条件数とともに表す。このうち、 $\Delta t$ が1/1,000の場合について、フィルタリング後の推定加速度をFig.6.6に示す。ただし、解析に用いる積分パラメータ $\gamma$ は1/2で、 $\beta$ は推定波を25Hzまでのローパスフィルターに通したときに計算誤差の最小になるよう有効数字1桁で求める。また、 $\Delta t = 1/50$ のケースの $\beta = 1/4$ は、解析継続

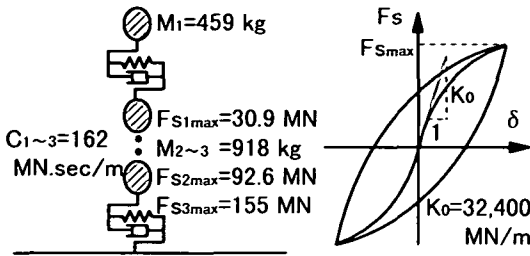


Fig.6.1 Nonlinear 3DOF model Fig.6.2 Modified Hardin-Drnevich stiffness property.

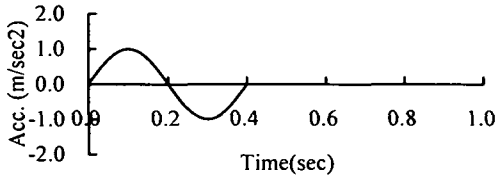


Fig.6.3 Input acceleration (target)

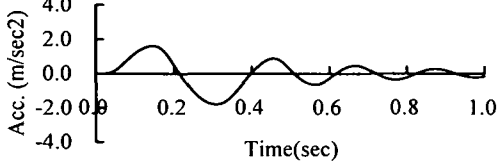
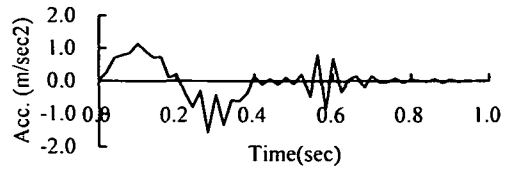


Fig.6.4 Absolute response acceleration calculated by the forward analysis

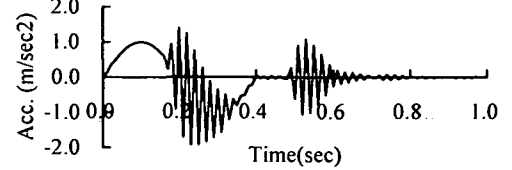
時間 1 秒では計算誤差が最小になるが、継続時間を伸長すると発散することから除外する。

Fig.6.5 より、 $\Delta t=1/50$  や  $1/100$  のケースでは、ノイズが比較的低周波で、推定精度が回復するまでに時間を要するが、 $\Delta t=1/1,000$  や  $1/10,000$  では、ノイズが高周波で、推定精度の回復も非常に速く、良い近似が行えていることが分かる。ちなみに、後者の 2 ケースについては、 $\beta$  をより小さくすると、高周波ノイズの振幅は大きくなるが、低周波のノイズは小さくなり、高周波ノイズ以外の部分における解析精度は向上する。また、Table 4.1 に表すように、25Hz までのローパスフィルター処理後の推定波は、 $\Delta t=1/50$  のケースを除いて計算誤差が最大で 2.4% と非常に高精度で、時刻歴波形でも、Fig.6.6 に示すように厳密解との差異がほとんど見られない。ただし、本解析例では、実際の地震観測記録の計測時間間隔や時刻歴応答解析を行う場合の対象周波数を考慮し、25Hz までのローパスフィルターとした。ちなみに、 $\Delta t=1/1,000$ 、 $\beta=9$  のケースで、50Hz までのフィルターに通すと計算誤差は 9.9% と大きくなる。

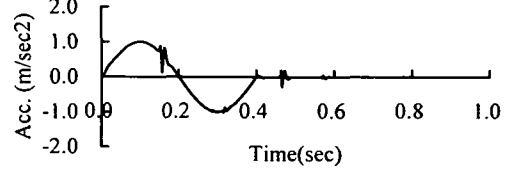
この解析ケースの場合、0.15 秒付近で最下質点 (mass.3) と基盤間の応力-ひずみ関係の履歴曲線が初めて折り返しを起こす。この折り返し時点で計算誤差は微増するが、推定精度には影響を与えるほどのものではない。しかし、これ以後、この計算誤差が増幅し、約 10



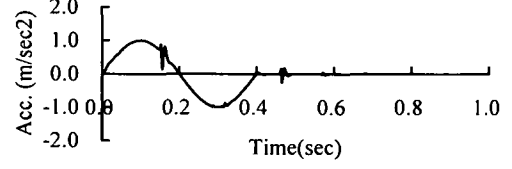
(a)  $\Delta t=1/50, \beta=0.3$



(b)  $\Delta t=1/100, \beta=0.3$



(c)  $\Delta t=1/1,000, \beta=9$



(d)  $\Delta t=1/10,000, \beta=900$

Fig.6.5 Identified input acceleration

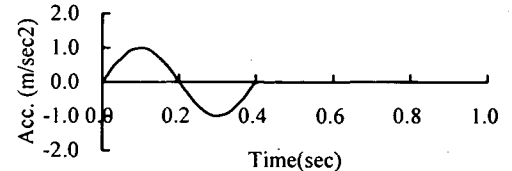


Fig.6.6 Identified input acceleration through 25Hz-low-pass filter ( $\Delta t=1/1,000, \beta=9$ )

Table 4.1 Effect of  $\Delta t$  on condition number of coefficient matrix,  $[A]$  and maximum calculation error of identified input acceleration through 25Hz-low-pass filter (Nonlinear 3DOF model)

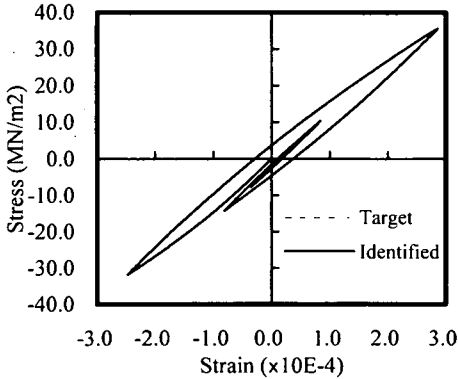
$\Delta t$	$\beta$	condition number	calculation error (%)
1/50	0.3	$42 \times 10^0$	85.1
1/100	0.3	$347 \times 10^0$	2.0
1/200	0.6	$177 \times 10^1$	2.2
1/500	2	$127 \times 10^2$	2.4
1/1,000	9	$179 \times 10^2$	2.3
1/2,000	40	$190 \times 10^2$	2.4
1/5,000	200	$417 \times 10^2$	2.4
1/10,000	900	$328 \times 10^2$	2.3

ステップ後の高周波ノイズが発生する原因となってい



**Table 4.2** Maximum calculation error of strain  
(Nonlinear 3DOF model)

mass number	calculation error (%)
1-2	0.06
2-3	0.06
3-base	0.2



**Fig.7** Stress-strain curve between mass3 and base  
(Nonlinear 3DOF model)

る。このように、この解析モデルは修正 Hardin-Dmievich モデルを採用していることから、応力-ひずみ履歴を精度良く近似することが、それ以降の剛性を正しく評価し、入力加速度の推定精度を保つために重要である。そこで、ここでは各質点間の応力-ひずみの履歴曲線に着目する。各質点間の応力-ひずみ曲線のひずみに関する最大計算誤差を Table 4.2 に表し、最下質点(mass 3)と基盤との間における応力-ひずみの履歴曲線の厳密解と解析解を Fig.7 に示す。

Table 4.2 より、本逆算による解析では、最下質点(mass 3)と基盤間の履歴曲線の計算誤差が最も大きいですが、この場合でも計算誤差は 0.2%と非常に高精度であり、Fig.7 に示すように、ほぼ厳密解と一致する。このように、本逆算法では、推定加速度に含まれる高周波のノイズが小さい場合には、各質点間のひずみを高精度に近似できることが分かる。

ちなみに、本計算例の上の 2 質点と同じ特性を持つ 2 自由度非線形系では、 $\Delta t=1/1,000$ 、 $\beta=0.4$  でフィルタリングを行わなくても、推定入射波の最大計算誤差は 0.9%と非常に高精度の近似が可能である。また、より多自由度のケースについては次章で簡単に触れる。

#### 4. ペナルティ関数による逆算精度の改良

式(11)の  $\{\ddot{x}\}^{n+1}$  には、時間領域での離散化や計算時の有効桁数に制約等があるため、多かれ少なかれ計算誤差

が必ず含まれることになる。しかし、本来、厳密解が分からないことから、計算誤差は未知数であり、また、前章の数値解析例からも分かるように、計算誤差は急激にオーダーの異なる変化を起こすなど、その統計的性質は明らかでない。したがって、確率論的手法により、計算誤差の制御を行うことは困難である。しかし、本逆算法には、2 および 3 章で述べたように、各解析ステップにおいて全質点にほぼ同値の相対加速度の誤差が発生する特性がある。そこで、本研究では上記の計算法に、計算誤差に関するペナルティ関数を導入することにより、解の安定化を図る。

##### (1)ペナルティ関数の導入

通常、計算誤差の最小化を行う場合には、各質点でそれぞれに、計算誤差の推定を行う必要がある。しかし、本計算法では前述のように、剛体モードの相対加速度の誤差が発生する特性があることから、全質点に共通な誤差の推定値  $\alpha$  で式(11)の  $\{\ddot{x}\}^{n+1}$  を次式のように補正し、 $n+1$  ステップ目における相対応答加速度の推定値とする。

$$\ddot{x}_i^{n+1} = \ddot{x}_i^{n+1} + \alpha^{n+1} \quad (14)$$

ここに、 $\alpha$  の上付数字はステップ数、下付数字は質点番号を表す。また、 $\alpha$  付きの相対応答加速度は各ステップにおける最終的な推定値であることを意味し、式(11)により得られる相対応答加速度と区別する。

式(11)の  $\ddot{x}_i^{n+1}$  と前ステップの推定値  $\ddot{x}_i^n$  の応答差は、実際の応答による変化分と計算誤差で構成される。しかし、各タイムステップにおいて、本来、厳密解が不明であることから、計算誤差は未知であり、その計算誤差だけを応答差から抽出することは困難である。一方、計算時間間隔をある程度短く設定すると、任意の質点における 1 ステップ間の相対応答加速度の変化は小さくなる。したがって、応答差が小さい場合には計算誤差自体が小さく、変化が大きい場合には計算誤差がその変化の大部分を占めることが想定される。また、1 ステップ間の応答の変化も各質点で異なることから、各質点における応答差の 2 乗平均を採ることにより、個々の推定値に含まれる計算誤差の存在をクローズアップさせることができると仮定する。

上記の理由から、次の式(15)の評価関数を最小にする計算誤差の近似値  $\alpha^{n+1}$  を求め、式(14)に代入することで、当該ステップにおける応答加速度の改良が可能になると考えられる。

$$J = \sum_i^N \sum_j^N M_{ij} (\ddot{x}_i^{n+1} + \alpha^{n+1} - \ddot{x}_i^n) + \rho \sum_i^N \sum_j^N M_{ij} (\alpha^{n+1})^2 \quad (15)$$

ただし、各質点の応答値の重み係数として質量マトリクスを用いている。また、 $\rho$ は正の定数で計算誤差の抑制の程度に関する重み係数を表す。

式(15)の評価関数を最小にする $\alpha^{n+1}$ は、 $J$ の $\alpha^{n+1}$ に関する勾配 (gradient) を計算し、

$$\nabla \alpha^{n+1} \cdot J = \frac{\partial J}{\partial \alpha^{n+1}} = 2 \sum_i^N \sum_j^N M_{ij} (\ddot{x}_i^{n+1} + \alpha^{n+1} - \ddot{x}_i^n) + 2\rho \sum_i^N \sum_j^N M_{ij} \alpha^{n+1} = 0 \quad (16)$$

より、決定できる。すなわち、 $n+1$  ステップ目の計算誤差の推定値は次式で与えられる。

$$\alpha^{n+1} = - \frac{\sum_i^N \sum_j^N M_{ij} (\ddot{x}_i^{n+1} - \ddot{x}_i^n)}{(1 + \rho) \sum_i^N \sum_j^N M_{ij}} \quad (17)$$

以後、2章で説明した解析法を Basic method, ペナルティ関数を導入することにより解の改良を行う方法を Improved method と呼ぶ。ただし、本解析は基本的に確定論的な計算であり、最適な $\rho$ を求めることはできないので、以後の計算は、ペナルティ関数の重み係数 $\rho$ は1として解析を行う。

## (2) 逆算精度の検討

上記の改良法の解析精度を検証する目的で数値解析を実施する。

解析は、復元力が修正 Hardin-Drnevich モデルである4自由度非線形モデルを対象とする。その材料特性および復元力特性を Fig.8.1 に示す。入力加速度は Fig.8.2 に示す周期0.4秒の正弦波で、観測波は Fig.8.3 の最上質点における絶対応答加速度である。

解析は、パラメータとして、 $\Delta t=1/1,000$ ,  $\gamma=1/2$ ,  $\beta=1\sim7$ の7種類のケースについて行う。Basic method および Improved method により推定された入力加速度を Fig.8.4(a), (b) にそれぞれ示す。次に、推定加速度に発生する高周波ノイズを除去する目的で、推定加速度結果を25Hzまでのローパスフィルターに通す。フィルタリング後の推定加速度を Fig.8.5(a), (b) に、推定波形の計算誤差の最大値を Table 5 に示す。ただし、Fig.8.4, 8.5 については、Table 5 の計算誤差の小さいケース、すなわち、Basic method は $\beta=6$ , Improved method は $\beta=2$ の

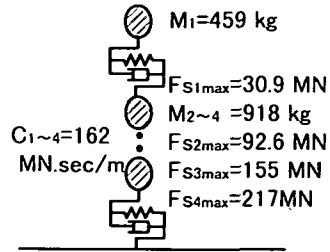


Fig.8.1 Nonlinear 4DOF model

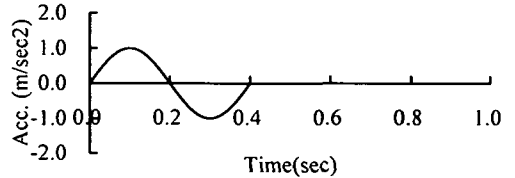


Fig.8.2 Input acceleration (target)

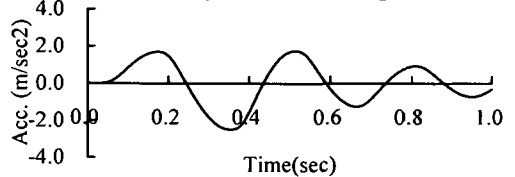
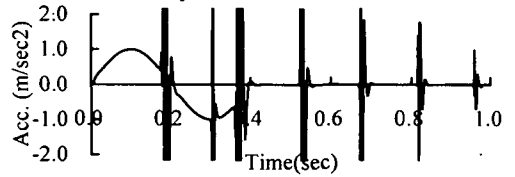
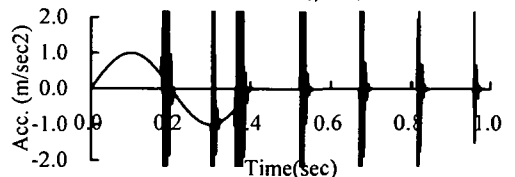


Fig.8.3 Absolute response acceleration calculated by the forward analysis



(a) Basic method ( $\beta=6$ )

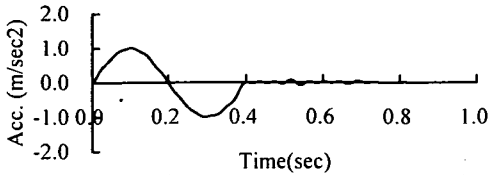


(b) Improved method ( $\beta=2$ )

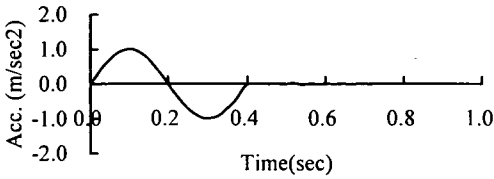
Fig.8.4 Identified input acceleration

場合を示す。

4自由度非線形系に対する入射波の推定は、Fig.8.4(a), (b)より、Basic method, Improved method とともに、非常に大きな高周波ノイズが数回発生している。この時、一時的に計算誤差は増大するが、その後、速やかに解析精度は回復している。Basic method は、その回復過程において、比較的低周波の成分が含まれるが、Improved method には、低周波のノイズは見られない。これは、Basic method が大きな $\beta$ を採用しているためだけでなく、Improved method と同等の $\beta$ で逆算を行っても、周期は多少短くなるが、低周波のノイズが含まれることになる。次に、25Hz までのローパスフィルター処理を施すと、Basic



(a) Basic method ( $\beta=6$ )



(b) Improved method ( $\beta=2$ )

Fig.8.5 Identified input acceleration through 25Hz-low-pass filter

Table 5 Comparison between maximum calculation error of the basic method and that of the improved method

$\beta$	Basic method (%)	Improved method (%)
1	255.2	15.7
2	95.3	3.0
3	29.1	3.5
4	11.1	3.8
5	8.4	4.0
6	8.3	4.7
7	8.6	5.6

method では、Fig.8.5(a)に示すように、Fig.8.5(b)の Improved method より、周期 0.04 秒程度の成分のために解析精度が幾分低下する。この低周波成分は、振動系の最短の固有周期が 0.05 秒強であるので、系の固有周期とは関係なく、 $\beta$ を大きく設定することにより現れる低周波成分であると考えられる。また、Table 5 に表すように、この場合の計算誤差は、Basic method が  $\beta=6$  で 8.3%、Improved method が  $\beta=2$  で 3.0%といずれも高精度の近似が行えていることが分かる。

ちなみに、3章の数値解析例を用いたいずれのモデルにおいても、Improved method は Basic method より計算誤差が小さく、 $\Delta t=1/1,000$  秒、 $\beta=2$  で最大計算誤差が数%と十分な精度の推定が可能である。

## 5. まとめ

(1)基盤入力加速度を未知数とした運動方程式の定式化を行い、それを時間領域で逐次積分することにより、観測点における絶対応答加速度から基盤入力地震動を逆算する手法を提案した。本手法は、非線形な多自由度系に対しても適用可能である。

(2)計算時間間隔に応じた適度に大きい積分パラメータ  $\beta$ を採用することで、線形モデルに対しては非常に高精度に、低次の非線形モデルに対してもローパスフィルターを施すことにより、入射波の精度良い逆算が可能であることが分かった。

(3)本逆算法には、剛体モードの計算誤差が発生する特性があることから、この特性を利用して計算誤差に関するペナルティ関数を導入し、解の精度を改善する手法を提案した。

(4)(3)の改良法は本論文の数種類の数値解析例に対し、 $\Delta t=1/1,000$  秒、 $\beta=2$  で計算誤差の最大値が数%と十分な精度の推定が可能であった。

本研究では、振動系の材料定数、復元力特性が既知であり、かつ、観測波がノイズに汚染されていない場合について、時間領域での逆算で、入射波の推定が高精度に行えることを示した。しかし、実際の観測波は必ずノイズを含んでおり、また、地盤の材料定数、復元力特性も完全に既知ではない。したがって、今後の課題として、入力の不確定性等も逆算のアルゴリズムの中に取り入れ、さらに、実際の鉛直アレー記録を基に本手法の適用性の検証を行いたい。

## 参考文献

- 1) Schnabel,P.B., Lysmer,J. and Seed,H.B. : SHAKE - A computer program for earthquake response analysis of horizontally layered sites, *EERC Report*, Vol.72, No.12, University of California, Berkeley, 1972.
- 2) Toki,K., Sato,T. and Kiyono,J. : Identification of structural parameters and input ground motion from response time histories, *Proc. of the Japan Society of Civil Engineers*, No. 410/1-12, pp.243-251, 1989.
- 3) 須藤敏史, 星谷勝, 柳河勇 : 絶対応答を用いた地震動入力とシステムパラメータ同定, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.709-716, 1995.
- 4) Hoshiya,M. and Saito,E. : Structural identification by extended Kalman filter, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.110, No.12, 1984.
- 5) 丸山収, 星谷勝 : 構造系に対する入力地震動の同定, 第 19 回地震工学研究発表会講演概要, pp.145-148, 1987.
- 6) Jazwinshki,A.H. : *Stochastic process and filtering theory*, Academic Press, 1970.
- 7) 土岐憲三, 三浦房紀 : 地盤構造物系の非線形地震応答解析, 土木学会論文集, 第 317, pp.61-68, 1986.
- 8) Newmark,N.M. : A method of computation for structural dynamics, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.85, No.EM3, pp.67-94, 1959.
- 9) 土木学会 : 動的解析の方法, 動的解析と耐震設計, 第 2 巻, 技報堂出版, 1989.
- 10) 柴田明徳 : 最新耐震構造解析, 最新建築学シリーズ 9, 森北出版, 1981.
- 11) 土岐憲三 : 構造物の耐震解析, 新体系土木工学 11, 技報堂, 1981.
- 12) 小坪清真 : 土木振動学, 森北出版, 1973.

- 13) 鷺津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦 : 有限要素法ハンドブック-I 基礎編-, 培風館, 1981. ウェア, 丸善, 1989.
- 14) 山本善之, 山田善一 : マトリクス構造解析の誤差論, 培風館, 1972. 17) 足立紀尚, 龍岡文夫 : 土の力学(III)-圧密・せん断・動的解析-, 新体系土木工学 18, 技報堂出版, 1990.
- 15) 鷺津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦 : 有限要素法ハンドブック-II 応用編-, 培風館, 1983. (1996.10.28 受付)
- 16) 渡部力, 名取亮, 小国力 : Fortran77 による数値計算ソフト

## A BASIC STUDY TO IDENTIFY THE INCIDENT SEISMIC WAVE ON THE BASE LAYER IN TIME DOMAIN

Hisakazu SAKAI, Sumio SAWADA and Kenzo TOKI

The incident seismic wave on the base layer is generally calculated on frequency domain using multiple reflection theory from the observed records on the ground surface or in the borehole. In this case, the equivalent linear model is employed to approximate the non-linear behavior of soil. However, the equivalent linear model is not suitable for simulations under strong shaking. In this paper, a backward calculation method to identify the incident wave in time domain is proposed for applying non-linear analysis. Numerical examples are conducted to examine the accuracy and stability of this method.