

# 地震動振幅を用いた基盤地動分布の確率的補間

野田 茂<sup>1</sup>・盛川 仁<sup>2</sup>・山崎文雄<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 鳥取大学助教授 工学部社会開発システム工学科 (〒680-0945 鳥取市湖山町南4-101)

<sup>2</sup>正会員 工博 鳥取大学助教授 工学部土木工学科 (〒680-0945 鳥取市湖山町南4-101)

<sup>3</sup>正会員 工博 東京大学助教授 生産技術研究所第5部 (〒106-8558 東京都港区六本木7-22-1)

最近、基盤面における地震動指標値の空間分布を推定することが試みられている。その多くは確定的補間手法に基づくものであり、かつ地盤増幅度を確定的に取り扱っている。そこで本研究では、確率地盤において地表面の最大地動と地盤増幅度の不確定性ならびに両者の相互相関性を考慮した上で、基盤面における最大地動の空間分布を推定するために条件付対数正規確率場の理論式を誘導した。異なる観測量間の相互相関性、観測条件などが基盤地動の最適推定値、推定誤差分散に及ぼす影響を理論的に検討するとともに、一般解の性質に関して確率的に議論した。さらに距離減衰式と地盤増幅度のモデルを基にして単純な計算を実施した結果、提案手法の有効性、推定精度の意味、事前情報の影響などが明らかになった。

**Key Words:** *stochastic interpolation, conditional probability density function, earthquake records, bedrock ground motions, soil amplification ratio, stochastic ground*

## 1. 序論

地震動特性を表わす物理量として最も単純なものは地震波形の最大振幅値である。この振幅値は地震動強さの指標になり、最大加速度、最大速度、計測震度などが用いられる。地震動特性を示す量は数多くあるが、中でもこれら振幅値に注目した強震記録の統計解析が行われ、これまで種々の研究成果が発表されてきている(例えば文献1)参照)。また地震動の統計的性質を調べる際の留意点も明らかになっている。

地表面での地震動は、ある程度共通の深さあるいは物性値を有する地盤(いわゆる工学的基盤)において記録・推定された地震動に、表層地盤の影響(増幅度や伝達関数)を加味することによって評価される。このためには基盤面における地震動分布を合理的に求めておくことが必要である。そこで本研究では、地表面の地震動と、増幅度で代表される表層地盤に関する不確定性の影響(事前情報)に対し、それらの実観測記録を制約条件として加えることにより、基盤面での地震動分布を確率的に推定することを試みる。

基盤面における地震動振幅を推定する方法としては、1)断層と地下構造モデルを用いた理論的地震動評価法、2)余震記録などを用いた半経験的地震動評価法、3)最大振幅値の距離減衰式などを用いた経験的地震動評価法が考えられる。また、地盤構造モデルを仮定した上で逆解析法を用いることにより、地表地震波形から基盤地震波形を同定することも行われている<sup>1)</sup>。基盤地震波は地表記録に比べて変動が少ないため、このような解析法から推定された基盤地震動を地盤モデルに入力

することにより、地表地震動の空間分布が容易に求められる。

最近、高田・尾崎<sup>2)</sup>、濱田・杉田・金子<sup>3)</sup>、山崎・大西・田山・高野<sup>4)</sup>は、工学的基盤面における地震動指標値(最大加速度、最大速度、計測震度)を推定するのに、地表面での観測値(地震動指標値)をその地点での地盤増幅度で割り、その値を基にして補間計算を実施することを試みている。その際、高田らの計算は有限要素法における形状補間関数を、また濱田らは線形補間式に基づく導関数ノルムの最小解を用いた確定的補間法によっている。一方、山崎らは地震動の不確定性を考慮した確率場を設定した上で、推定誤差をも評価できるKriging法によって確率的に補間・推定を行っている。いずれの方法も観測値を基にして得られた値をサンプルと見なした上で、これらサンプルを制約条件とし、それ以外の地点における工学的基盤面での地震動を推定するため、条件付推定問題が取り扱われている。

上記一連の研究において地盤増幅度は、おのおの、地質分類などのデータに基づく経験値、距離減衰式の地点係数から推定された値、基盤の地震動指標値と地盤増幅度間の回帰値などから求められている。ただしこの地盤増幅度にはサンプルデータのばらつきが考慮されておらず、平均的に定められた値が採用されている。このように地盤特性は確定的にモデル化されることが多い。しかし現実的には、1)現象が本来的に有する確率的不確定性、2)モデル化などに伴う不確定性、3)有限数の観測に伴う統計的不確定性が存在する。このため地震動解析に当たっては地盤特性評価においても確

率論的手法を導入することが望ましい。

そこで本論文では地震動指標値ならびに地盤増幅度の空間相関性と不確定性を考慮した上で、地表面での地震観測記録のみから、あるいは地表・地中同時観測記録から基盤面における地震動指標値の空間分布を推定する確率論的補間理論を提案する。

本研究では基盤における地震動指標値の空間分布を推定するために条件付対数正規確率場の推定理論式を解析的に導いているので、最適推定値ならびに推定精度に関して理論的な検討を容易に行うことができる。さらに地表における地震動指標の距離減衰式と地盤増幅度を設定した上で、推定理論式をこの事前情報に適用して数値的検討を加えることにより、提案手法の有用性を明らかにする。なお文献5)では条件付対数正規確率場の一般的な推定理論式を導いているが、これは本論文と対比させると3.で述べるように地表地動の空間分布推定手法に相当するものである。本論文では地表地動と地盤増幅度の関係を考慮した基盤地動の空間分布推定手法を提案しており、確率的な取り扱い文献5)と異なっている。

## 2. 問題の設定

### (1) 解析対象

本研究では、地表地震動の最大振幅ならびに地盤増幅度の観測値を用いて基盤での最大地動の空間分布を推定する。以下では最大地動のことを単に地動と呼ぶことにする。解析の対象としたケースは次の4通りである。

- 1) 地表地動の観測値のみを用いる場合
  - 1-1) 地表地動振幅と地盤増幅度が互いに独立なとき(ケース1)
  - 1-2) 地表地動振幅と地盤増幅度に相関関係があるとき(ケース2)
- 2) 相互相関性を有する地表地動と地盤増幅度の観測値を用いる場合
  - 2-1) 地表地動と地盤増幅度の同時観測(ケース3)
  - 2-2) 地表地動と地盤増幅度の観測点数が異なるとき(ケース4)

ここで、地表地動と地盤増幅度が同時に観測されることは、鉛直アレー観測などによって地表・地中記録が確定的に与えられることを意味する。

ケース1では、 $(n-1)$ 箇所まで地表地動が与えられた条件下において、地表の未観測点 $n$ における直下の地盤情報の不確定性を考えた上で基盤地動を推定する。ただしこのケースにおいては地震動振幅と地盤増幅度間に相関性を考慮しない。一方、ケース2では、 $(n-1)$ 箇所まで地表の観測値が与えられ、 $n$ 地点直下の地盤増幅度

と $(n-1)$ 箇所ならびに推定点 $n$ の地表地動間に相関性を仮定する。ケース3では $(n-1)$ 箇所まで地表地動振幅と地盤増幅度が同時に観測され、かつ両者に相関関係があるときに未観測点 $n$ の基盤地動を求める。ケース4においても地表地動と地盤増幅度間に相関関係を導入するが、このケースでは $(n-1)$ 箇所まで地表地動が観測され、そのうち $m$ 箇所まで地盤増幅度が確定的に与えられる。

なお、2.以降における理論式の展開の際、ケース1~ケース4の区別を明確にするため、式、記号にはケースを表わす添字(1~4)をつけている。

### (2) 事前確率場

#### a) 対数正規確率場の仮定

最大加速度、最大速度などの最大地動は理論的には極値分布で表わせるが、既往の強震記録データベースから頻度分布をとると対数正規分布に近い分布になることが知られている。このため最大地動や応答スペクトルの距離減衰に関する確率モデルにおいても、この対数正規分布が一般的に仮定される。このような仮定は断層モデルの理論解を用いた地震動スペクトル式の結果と矛盾しない(例えば文献1)参照)。

基盤から地表までの表層地盤の増幅特性は、地盤の層厚、速度、密度や減衰定数などの物理定数、地盤の不整形性、地盤の非線形特性などによって異なる<sup>1),6)</sup>。地盤増幅度については種々の研究が実施されているが、ここでは、地表・地中観測によって得られた最大地動比の分析結果<sup>7)</sup>をも参考にして、地盤増幅度の確率分布が対数正規分布によって説明できると考える。

地表地動、地盤増幅度を対数正規確率変数の $x, a$ で表わすと、付録A(2)に見られるように $x/a$ で表わせる基盤地動の確率変数は対数正規分布に従う。 $x, a$ を正規分布で仮定して地震動の統計的分析を行うことがあるが、その考え方を踏襲すれば2つの正規確率変数 $x, a$ の商は正規確率変数にならず、付録A(1)の式(A.6)のように複雑な分布形になる。従って、 $x/a$ の統計量は数値積分によって求めざるを得ない。対数正規確率変数の商の平均値が式(A.13)のように表示できるのと比べ、式(A.6)を用いた理論展開は容易ではない。

以上のことから、ここでは物理的意味、解析的展開の容易さを勘案した上で、地震動ならびに地盤特性の不確定性として条件付対数正規確率場を仮定し、基盤地動分布の推定理論式を提案する。

#### b) 確率モデルの設定

地表地動ならびに地盤増幅度は空間的に平均値や分散が変化する非均一確率場に従うとする。それらの確率変数については、地震動観測、常時微動観測などにより、あるいは既往の先験知識により、以下の事前情報

が与えられていると仮定する。

- 1) 離散空間位置  $i$  における地表地動, 地盤増幅度の確率変数をそれぞれ  $x_i, a_i$  で表す. 変数  $x_i, a_i$  の周辺確率密度関数  $f(x_i), f(a_i)$  は事前に与えられる. その結果, 任意点  $i$  における無条件平均値  $\mu_{x_i}, \mu_{a_i}$ , 無条件分散  $\sigma_{x_i}^2, \sigma_{a_i}^2$  は既知である.
- 2)  $x_i$  と  $x_j, a_i$  と  $a_j, x_i$  と  $a_j$  間の無条件相関係数(あるいは無条件共分散)は任意の2点  $i$  と  $j$  間で,  $\rho_{x_i x_j}, \rho_{a_i a_j}$  (あるいは  $C_{x_i x_j}, C_{a_i a_j}, C_{x_i a_j}$ ) として推定されているとする.
- 3) 正規確率変数  $\ln x_i, \ln a_j$  に対しては無条件平均値  $\lambda_{x_i}, \lambda_{a_j}$ , 無条件分散  $\zeta_{x_i}^2, \zeta_{a_j}^2$  が,  $\ln x_i$  と  $\ln x_j, \ln a_i$  と  $\ln a_j, \ln x_i$  と  $\ln a_j$  については  $\rho'_{x_i x_j}, \rho'_{a_i a_j}, \rho'_{x_i a_j}$  の無条件相関係数(あるいは  $C'_{x_i x_j}, C'_{a_i a_j}, C'_{x_i a_j}$  の無条件共分散)が事前に既知である. これらは, 対数正規確率変数と正規確率変数の関係式から, 上記1), 2)の結果を用いて求められる.

地表地動の事前特性値(平均値, 分散, 共分散)は, 野田・清野・星谷<sup>8)</sup>によって提案された, カルマンフィルタによる逐次漸化型同定法を用いれば, 計算容量が少なく, 計算効率の高い推定結果を容易に得ることが可能である. 一方で, 地表・地中観測点では地盤特性が調査されていることが多いので, ボーリングデータなどによる地盤構造モデルを用いた数値解析, 地震観測・常時微動観測などにより, 地盤増幅度の平均値, 分散を推定することは困難なことではない. また複数地点間の地盤増幅度の共分散, 地表地動と地盤増幅度間の共分散についても, 種々の方法によってモデル化すればよい.

本論文では, 以上の仮定の下に, まず既知の観測値  $((n-1)$  箇所の地表地動  $\mathbf{X}_{n-1} = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}^T$ , 地盤増幅度  $\mathbf{A}_{n-1} = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}^T$  あるいは  $m$  箇所の地盤増幅度  $\mathbf{A}_m = \{a_1, \dots, a_m\}^T (m < n-1)$ ) を用いて未観測点  $n$  における基盤地動  $y_n$  に関する条件付確率密度関数を定義する. その上で不偏最小誤差分散推定値である条件付平均値を求める理論式を導く. これより2.(1)で述べた設定条件の違い(ケース1~ケース4)が未観測点における推定結果に及ぼす影響を理論的に明らかにすることができる.

### 3. 独立な地表地動と地盤増幅度に対する基盤地動の推定

地表の  $(n-1)$  箇所における最大地動の確率変数ベクトルを  $\mathbf{X}_{n-1} = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}^T$ , この  $\mathbf{X}_{n-1}$  が与えられた条件下において  $n$  地点の最大地動に関する確率変数  $x_n$  の条件付確率密度関数を  $f_1(x_n | \mathbf{X}_{n-1})$  とする. その上で  $n$  地点の地盤増幅度  $a_n$  の不確定性(確率密度関数

$f_1(a_n)$ ) を考慮すると,  $n$  地点直下の基盤における最大地動  $y_n$  の条件付確率密度関数  $f_1(y_n | \mathbf{X}_{n-1})$  が求められる. その結果, 推定誤差分散を最小にすると, 基盤地動分布の最適推定量すなわち条件付平均値が得られる.

本章では, 基盤地動を簡易的に推定する一つの近似法として, 地表の多地点間の最大地動には空間相関性を導入するが, 地表地動と地盤増幅度は互いに独立であると仮定する. 基盤地動分布の推定に当たってはまず地表地動の条件付確率密度関数  $f_1(x_n | \mathbf{X}_{n-1})$  を定式化しなければならない.

#### (1) 地表地動の条件付確率密度関数

$f_1(x_n | \mathbf{X}_{n-1})$  は, 文献5)の定義, すなわち与えられた対数正規分布に従う確率変数  $x_i$  を等価標準正規確率変数  $z_i (i = 1 \sim n)$  に変換した上で, 正規確率場における条件付確率密度関数と等価標準正規変換式(式(2.c))を用いれば,

$$f_1(x_n | \mathbf{X}_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi_1 \zeta_{x_n | c} x_n}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln x_n - \lambda_{x_n | c}}{\zeta_{x_n | c}} \right)^2 \right\} \quad (0 < x_n < \infty) \quad (1)$$

と表わすことができる. 式中の  $\lambda_{x_n | c}, \zeta_{x_n | c}^2$  は

$$\lambda_{x_n | c} = \lambda_{x_n} + \zeta_{x_n} \mu_{z_n | c} \quad (2.a)$$

$$\zeta_{x_n | c}^2 = \zeta_{x_n}^2 \sigma_{z_n | c}^2 \quad (2.b)$$

であり, 標準正規確率場における  $z_n$  の条件付平均値  $\mu_{z_n | c}$  (式(2.d)), 条件付分散  $\sigma_{z_n | c}^2$  (式(2.e)) からなる. 以下簡単のため, 任意の確率変数  $\nu_n$  の条件  $\nu_n | \mathbf{X}_{n-1}$  を  $\nu_n | c$  と表わす. なお, 標準正規確率変数  $z_i$  は対数正規確率変数  $x_i$  に対し,

$$x_i = \exp(\lambda_{x_i} + \zeta_{x_i} z_i) \quad (i = 1 \sim n) \quad (2.c)$$

の関係式で結びつけられる.

$$\begin{aligned} \mu_{z_n | c} &= \sum_{i=1}^{n-1} b'_{x_i} z_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} b'_{x_i} (\ln x_i - \lambda_{x_i}) / \zeta_{x_i} \end{aligned} \quad (2.d)$$

$$\sigma_{z_n | c}^2 = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} b'_{x_i} \rho'_{x_i} \quad (2.e)$$

式(2.d), (2.e)の重み係数  $b'_{x_i} (i = 1 \sim n-1)$  は次式のように標準正規確率場における無条件相関係数  $\rho'_{x_i x_j}, \rho'_{x_i a_j} (i, j = 1 \sim n-1)$  よりなる連立方程式の解である.

$$\sum_{j=1}^{n-1} b'_{x_j} \rho'_{x_i x_j} = \rho'_{x_i a_n} \quad (i = 1 \sim n-1) \quad (3.a)$$

上式において  $\rho'_{x_i x_j} = C'_{x_i x_j} / \zeta_{x_i} \zeta_{x_j}$  の関係が成り立つから,

$$g'_{x_j} = b'_{x_j} \zeta_{x_n} / \zeta_{x_j} \quad (3.b)$$

とおくと、式(3.a)は次のように重み係数 $g'_{x_j}$ 、対数正規確率場から変換した正規確率場での無条件共分散 $C'_{x_{ij}}, C'_{x_{in}} (i, j = 1 \sim n-1)$ で表わせる。

$$\sum_{j=1}^{n-1} g'_{x_j} C'_{x_{ij}} = C'_{x_{in}} \quad (i = 1 \sim n-1) \quad (3.c)$$

式(2.d), (2.e)を(2.a), (2.b)に代入し、式(3.b)の関係を利用すると、式(1)の ${}_1\lambda_{x_n|c}, {}_1\zeta_{x_n|c}^2$ は

$${}_1\lambda_{x_n|c} = \lambda_{x_n} + \sum_{i=1}^{n-1} g'_{x_i} (\ln x_i - \lambda_{x_i}) \quad (4.a)$$

$${}_1\zeta_{x_n|c}^2 = \zeta_{x_n}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} g'_{x_i} C'_{x_{in}} \quad (4.b)$$

と求められる。式(4.a)は $X_{n-1}$ が与えられた条件付正規確率場における $\ln x_n$ の条件付平均値を、式(4.b)は同確率場における条件付分散を意味する。

以上のことから、式(1)は確率変数ベクトル $X_{n-1}$ が与えられたとき、地表の $n$ 地点における最大地動 $x_n$ の条件付対数正規確率密度関数になっていることがわかる。

## (2) 基盤地動の条件付確率密度関数と推定式

### a) 条件付確率密度関数

$n$ 地点の地盤増幅度に関する確率変数 $a_n$ の密度関数を

$$f_1(a_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta_{a_n} a_n} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln a_n - \lambda_{a_n}}{\zeta_{a_n}}\right)^2\right\} \quad (0 < a_n < \infty) \quad (5)$$

のように対数正規分布で仮定する。ここに $\ln a_n$ の無条件平均値は $\lambda_{a_n}$ 、その無条件分散は $\zeta_{a_n}^2$ である。

$n$ 地点直下の基盤地動の確率変数 $y_n$ は、2つの独立な対数正規確率変数 $x_n, a_n$ によって、 $y_n = x_n/a_n$ と表わせる。 $x_n, a_n$ は式(1), (5)のように対数正規分布に従い、かつお互いに独立なので、 $y_n$ の条件付確率密度関数は付録A(2)の式(A.11)より、次のように求められる。

$$f_1(y_n|X_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta_{y_n|c} y_n} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y_n - {}_1\lambda_{y_n|c}}{\zeta_{y_n|c}}\right)^2\right\} \quad (0 < y_n < \infty) \quad (6)$$

ここに、

$${}_1\lambda_{y_n|c} = {}_1\lambda_{x_n|c} - \lambda_{a_n} \quad (7.a)$$

$${}_1\zeta_{y_n|c}^2 = {}_1\zeta_{x_n|c}^2 + \zeta_{a_n}^2 \quad (7.b)$$

であり、これらは式(4.a), (4.b)ならびに式(5)の $\lambda_{a_n}, \zeta_{a_n}^2$ よりなる。 ${}_1\lambda_{y_n|c}, {}_1\zeta_{y_n|c}^2$ は $\ln y_n$ の条件付平均値、条件付分散である。

### b) 最適推定量

式(6)で示した条件付対数正規確率密度関数を用いると、基盤の未観測点における最大地動の最適推定値を求めることができる。推定の評価関数として推定誤差

の2乗平均値を採用すると、分布形の相違によらず、最小2乗誤差規範に基づく最適推定値は条件付平均値と一致することが知られている<sup>5)</sup>。その結果は不偏推定値であり、かつ最小誤差分散推定値となる。よって付録A(2)の式(A.13)を式(6)に適用すると、基盤地動分布は次式によって推定できる。

$${}_1\hat{y}_{n|c} = \frac{{}_1\mu_{x_n|c}}{\mu_{a_n}} \exp(\zeta_{a_n}^2) \quad (8)$$

ここに、

$${}_1\mu_{x_n|c} = \exp\left({}_1\lambda_{x_n|c} + \frac{1}{2}{}_1\zeta_{x_n|c}^2\right) \quad (9.a)$$

$$\mu_{a_n} = \exp\left(\lambda_{a_n} + \frac{1}{2}\zeta_{a_n}^2\right) \quad (9.b)$$

ただし、上式において、 ${}_1\mu_{x_n|c}$ は $x_n$ の条件付平均値、 $\mu_{a_n}$ は $a_n$ の無条件平均値、 $\hat{\cdot}$ は最適推定量であることを示す。

### c) 推定誤差分散

式(8)に示す最適推定量 ${}_1\hat{y}_{n|c}$ の推定精度は、推定理論の定義により、次式の推定誤差分散によって評価される。

$${}_1\hat{\sigma}_{n|c}^2 = E\{(y_n - {}_1\hat{y}_{n|c})^2\} = \int_{S_{n-1}} f(X_{n-1}) \cdot \left\{ \int_0^\infty (y_n - {}_1\hat{y}_{n|c})^2 f_1(y_n|X_{n-1}) dy_n \right\} dX_{n-1} \quad (10)$$

ここに、 $f(X_{n-1})$ は $X_{n-1}$ の結合同時確率密度関数、 $S_{n-1}$ は変数 $X_{n-1}$ の積分値域である。

式(10)の $\{\cdot\}$ 内の被積分関数は $y_n$ の条件付分散 ${}_1\sigma_{n|c}^2$ を意味する。式(6)の条件付対数正規分布 $f_1(y_n|X_{n-1})$ を式(10)に代入して $\{\cdot\}$ 内の条件付分散を求めると、

$${}_1\sigma_{n|c}^2 = {}_1\hat{y}_{n|c}^2 \{\exp({}_1\zeta_{y_n|c}^2) - 1\} \quad (11)$$

となる。式(8), (9)よりわかるように、 ${}_1\hat{y}_{n|c}$ は $X_{n-1}$ に依存した ${}_1\lambda_{x_n|c}$ (式(4.a))を含む。このことを考慮して式(10)の計算を行うと、推定誤差分散 ${}_1\hat{\sigma}_{n|c}^2$ は次式のように求められる。

$${}_1\hat{\sigma}_{n|c}^2 = \mu_{y_n}^2 \exp(\zeta_{y_n}^2) \{1 - \exp(-{}_1\zeta_{y_n|c}^2)\} \quad (12)$$

ここに、 $\mu_{y_n}, \zeta_{y_n}^2$ は $y_n = x_n/a_n$ の無条件平均値、無条件分散であり、付録A(2)よりそれぞれ次式で表わせる

$$\mu_{y_n} = \frac{\mu_{x_n}}{\mu_{a_n}} \exp(\zeta_{a_n}^2) \quad (13.a)$$

$$\zeta_{y_n}^2 = \zeta_{x_n}^2 + \zeta_{a_n}^2 \quad (13.b)$$

式(11)と式(12)の比較から、条件付対数正規確率場における推定誤差分散は条件付分散と異なることがわかる。条件付分散は $X_{n-1}$ に依存するが、推定誤差分散は観測点の空間位置にのみ依存し、 $X_{n-1}$ には独立である。この点は条件付正規確率場とは異なる性質であり、条件付対数正規確率場における重要な特徴の一つであ

る。なお、式(11)、(12)の誘導の詳細については文献5)も参照されたい。

### (3) 特別な場合の最適推定値

a) 推定地点が地表観測点直下に位置するとき

基盤の推定地点 $n$ の真上の地表未観測点が $(n-1)$ 箇所の地表観測点の一つ $i(i=1\sim n-1)$ に一致するとき、基盤地動の条件付確率密度関数ならびに最適推定値は以下ようになる。ただし $i$ 地点における地表地動の観測値を $\underline{x}_i$ とする。この場合の条件は $\underline{c} = \underline{X}_{n-1}$ となる。

今、 $n \rightarrow i$ となるのであるから、式(3.c)が成り立つためには、重み係数 $g'_{x_j}$ は $j=i$ のとき1、 $j \neq i$ のとき0でなければならない。すると、式(4.a)、(4.b)は

$$\begin{aligned} {}_1\lambda_{x_i|\underline{c}} &= \lambda_{x_i} + \ln \underline{x}_i - \lambda_{x_i} \\ &= \ln \underline{x}_i \end{aligned} \quad (14.a)$$

$$\begin{aligned} {}_1\zeta_{x_i|\underline{c}}^2 &= \zeta_{x_i}^2 - C'_{x_i} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (14.b)$$

となるので、式(7.a)、(7.b)より

$$\begin{aligned} {}_1\lambda_{y_i|\underline{c}} &= {}_1\lambda_{x_i|\underline{c}} - \lambda_{a_i} \\ &= \ln \underline{x}_i - \lambda_{a_i} \end{aligned} \quad (15.a)$$

$$\begin{aligned} {}_1\zeta_{y_i|\underline{c}}^2 &= {}_1\zeta_{x_i|\underline{c}}^2 + \zeta_{a_i}^2 \\ &= \zeta_{a_i}^2 \end{aligned} \quad (15.b)$$

となるのがわかる。

式(14.a)、(14.b)を用いると、式(9.a)から ${}_1\mu_{x_i|\underline{c}}$ は $\underline{x}_i$ となる。式(15.a)、(15.b)を式(6)に代入すれば、次式が求められる。

$$\begin{aligned} f_1(y_i|\underline{X}_{n-1}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta_{a_i}y_i} \\ &\cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\ln y_i - (\ln \underline{x}_i - \lambda_{a_i})}{\zeta_{a_i}} \right\}^2 \right] \end{aligned} \quad (16)$$

上式からわかるように、観測値ベクトル $\underline{X}_{n-1}$ に基づいた基盤地動の条件付確率密度関数は、観測点 $i(i=1\sim n-1)$ 直下において、 $\ln y_i$ の条件付平均値が $\ln \underline{x}_i - \lambda_{a_i}$ 、条件付分散が $\zeta_{a_i}^2$ である対数正規分布に従う。すなわち確率変数 $y_i$ は基本的には地盤増幅度 $a_i$ の確率分布に依存することになる。

一方、基盤地動の最適推定値は、式(8)、(9)の関係より、次のようになる。

$$\begin{aligned} {}_1\hat{y}_i|\underline{c} &= \frac{{}_1\mu_{x_i|\underline{c}}}{\mu_{a_i}} \exp(\zeta_{a_i}^2) \\ &= \frac{\underline{x}_i}{\mu_{a_i}} \exp(\zeta_{a_i}^2) \end{aligned} \quad (17)$$

b) 地盤増幅度が確定値として与えられるとき

推定地点 $n$ の真上が地表観測点 $i$ と一致したとき、基盤地動の最適推定値は式(17)で表わせる。ここでさらに地盤増幅度 $a_i$ が確定的に与えられると、 $\mu_{a_i} \rightarrow \underline{a}_i$ 、 $\zeta_{a_i}^2 \rightarrow 0$ となるので、基盤地動 $y_i$ の最適推定値 ${}_1\hat{y}_i|\underline{c}$ は

$\underline{x}_i/\underline{a}_i$ となり、基盤で記録される観測値と完全に一致する。

未観測点 $n$ において地盤増幅度 $a_n$ が確定的に与えられると、基盤地動の推定値は以下ようになる。

このとき $\lambda_{a_n} \rightarrow \underline{a}'_n = \ln \underline{a}_n$ 、 $\zeta_{a_n}^2 \rightarrow 0$ になるので、式(5)の $f_1(a_n)$ は $\delta(a'_n - \underline{a}'_n)$ と表わせる。この場合式(7.a)、(7.b)から

$${}_1\lambda_{y_n|\underline{c}} = {}_1\lambda_{x_n|\underline{c}} - \underline{a}'_n \quad (18.a)$$

$${}_1\zeta_{y_n|\underline{c}}^2 = {}_1\zeta_{x_n|\underline{c}}^2 \quad (18.b)$$

となるので、式(6)の条件付確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_1(y_n|\underline{X}_{n-1}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}{}_1\zeta_{x_n|\underline{c}}y_n} \\ &\cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\ln y_n - ({}_1\lambda_{x_n|\underline{c}} - \underline{a}'_n)}{{}_1\zeta_{x_n|\underline{c}}} \right\}^2 \right] \end{aligned} \quad (19)$$

と求められる。これより地盤増幅度 $a_n$ が確定値 $\underline{a}_n$ として与えられると、基盤地動の確率変数 $y_n$ は $\ln y_n$ の条件付平均値が ${}_1\lambda_{x_n|\underline{c}} - \underline{a}'_n$ 、条件付分散が ${}_1\zeta_{x_n|\underline{c}}^2$ に従う条件付対数正規分布に至る。

さらに最適推定値 ${}_1\hat{y}_n|\underline{c}$ を式(8)から求めると、

$$\begin{aligned} {}_1\hat{y}_n|\underline{c} &= {}_1\mu_{x_n|\underline{c}}/\mu_{a_n} \\ &= {}_1\mu_{x_n|\underline{c}}/\underline{a}_n \end{aligned} \quad (20.a)$$

ここに、

$${}_1\mu_{x_n|\underline{c}} = \exp \left( {}_1\lambda_{x_n|\underline{c}} + \frac{1}{2}{}_1\zeta_{x_n|\underline{c}}^2 \right) \quad (20.b)$$

のようになる。

## 4. 地表地動と地盤増幅度の相関性を考慮した基盤地動の推定

前章では、地表地動と地盤増幅度の相関性を無視して基盤地動分布の推定値を得る簡便法を示した。しかしながら現実的には地表地動の大きさと地盤増幅度の間に相関関係が存在すると考えられる。例えば基盤地動に空間的な定常・均一性を仮定して地盤の非線形挙動を無視すると、一般的には地盤増幅度が大きくなると地表地動振幅は大きくなり、逆に地盤増幅度が小さくなると地表地動の大きさは小さくなるであろう。

そこで本章では地表地動と地盤増幅度ならびに2地点間の地盤増幅度に空間相関性を導入した上で、基盤地動振幅の一般的な推定理論式を導く。

### (1) 地表地動と地盤増幅度の結合同時確率密度関数

今、 $n$ 箇所の地表地動 $x_i$ 、地盤増幅度 $a_i$  ( $i=1\sim n$ )を成分とするベクトル $\underline{X}_n, \underline{A}_n$ よりなる式(21.a)の確率変数ベクトル $\underline{Z}_n$ 、ならびに $x_{e_i} = \ln x_i$ 、 $a_{e_i} = \ln a_i$  ( $i=1\sim n$ )を成分とするベクトル $\underline{X}_{en}, \underline{A}_{en}$ よりなる変数 $\underline{Z}_{en}$ (式(21.b))、 $\underline{Z}_{en}$ の無条件平均値ベクトル $\lambda_{z_n}$ (式

(21.c),  $Z_{en}$ の無条件共分散行列 $C'_{Z_n Z_n}$ (式(21.d))を考える。これらのベクトル, 行列について次の記号を定義すると,

$$\begin{aligned} Z_n^T &= \{X_n^T, A_n^T\} \\ &= \{X_{n-1}^T, x_n, A_n^T\} \end{aligned} \quad (21.a)$$

$$\begin{aligned} Z_{en}^T &= \{X_{en}^T, A_{en}^T\} \\ &= \{X_{en-1}^T, x_{en}, A_{en}^T\} \\ &= \{X_{en-1}^T, F_e^T\} \end{aligned} \quad (21.b)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{Z_n}^T &= \{\lambda_{X_n}^T, \lambda_{A_n}^T\} \\ &= \{\lambda_{X_{n-1}}^T, \lambda_{x_n}, \lambda_{A_n}^T\} \\ &= \{\lambda_{X_{n-1}}^T, \lambda_{F_e}^T\} \end{aligned} \quad (21.c)$$

$$C'_{Z_n Z_n} = \begin{bmatrix} C'_{X_n X_n} & C'_{X_n A_n} \\ C'^T_{X_n A_n} & C'_{A_n A_n} \end{bmatrix} \quad (21.d)$$

$Z_n$ の確率密度関数 $f(Z_n)$ は次のように表わせる。

$$\begin{aligned} f(Z_n) &= \frac{1}{(2\pi)^n |C'_{Z_n Z_n}|^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^n a_i} \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Z_{en} - \lambda_{Z_n})^T C'^{-1}_{Z_n Z_n} (Z_{en} - \lambda_{Z_n}) \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

$X_{n-1}$ が与えられた条件下における $x_n$ と $A_n$ の条件付結合同時確率密度関数 $f_2(x_n, A_n | X_{n-1})$ を誘導するために式(22), (23)を利用すると,

$$\begin{aligned} f(X_{n-1}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} |C'_{X_{n-1} X_{n-1}}|^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} a_i} \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X_{en-1} - \lambda_{X_{n-1}})^T \right. \\ &\quad \left. \cdot C'^{-1}_{X_{n-1} X_{n-1}} (X_{en-1} - \lambda_{X_{n-1}}) \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

$f_2(x_n, A_n | X_{n-1})$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} f_2(x_n, A_n | X_{n-1}) &= f(Z_n) / f(X_{n-1}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}} \left( \frac{|C'_{Z_n Z_n}|}{|C'_{X_{n-1} X_{n-1}}|} \right)^{\frac{1}{2}} x_n \prod_{i=1}^n a_i} \\ &\cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ (Z_{en} - \lambda_{Z_n})^T C'^{-1}_{Z_n Z_n} \right. \right. \\ &\quad \cdot (Z_{en} - \lambda_{Z_n}) - (X_{en-1} - \lambda_{X_{n-1}})^T \\ &\quad \left. \left. \cdot C'^{-1}_{X_{n-1} X_{n-1}} (X_{en-1} - \lambda_{X_{n-1}}) \right\} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

付録Bに示す諸式を用いて上式を整理すると,  $X_{n-1}$ が与えられたとき,  $x_n, A_n$ の条件付確率密度関数は次のように求まる。

$$\begin{aligned} f_2(x_n, A_n | X_{n-1}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}} |Q_2|^{\frac{1}{2}} x_n \prod_{i=1}^n a_i} \\ &\cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x_{en} - 2\lambda_{x_n|c} \\ A_{en} - 2\lambda_{A_n|c} \end{Bmatrix}^T \right] \end{aligned}$$

$$Q_2^{-1} \begin{Bmatrix} x_{en} - 2\lambda_{x_n|c} \\ A_{en} - 2\lambda_{A_n|c} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

ここに,  $2\lambda_{x_n|c}, 2\lambda_{A_n|c}$ は $x_{en}, A_{en}$ の条件付平均値,  $Q_2$ はそれらの条件付共分散を意味し, 次式で表わせる。

$$2\lambda_{x_n|c} = \lambda_{x_n} + C'^T_{X_{n-1} x_n} C'^{-1}_{X_{n-1} X_{n-1}} (X_{en-1} - \lambda_{X_{n-1}}) \quad (26.a)$$

$$2\lambda_{A_n|c} = \lambda_{A_n} + C'^T_{X_{n-1} A_n} C'^{-1}_{X_{n-1} X_{n-1}} (X_{en-1} - \lambda_{X_{n-1}}) \quad (26.b)$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 2\zeta_{x_n|c}^2 & 2C'_{x_n A_n|c} \\ 2C'^T_{x_n A_n|c} & 2C'_{A_n A_n|c} \end{bmatrix} \quad (27.a)$$

ただし,

$$2\zeta_{x_n|c}^2 = \zeta_{x_n}^2 - C'^T_{X_{n-1} x_n} C'^{-1}_{X_{n-1} X_{n-1}} C'_{X_{n-1} x_n} \quad (27.b)$$

$$2C'_{x_n A_n|c} = C'_{x_n A_n} - C'^T_{X_{n-1} x_n} C'^{-1}_{X_{n-1} X_{n-1}} C'_{X_{n-1} A_n} \quad (27.c)$$

$$2C'_{A_n A_n|c} = C'_{A_n A_n} - C'^T_{X_{n-1} A_n} C'^{-1}_{X_{n-1} X_{n-1}} C'_{X_{n-1} A_n} \quad (27.d)$$

## (2) 基盤地動の条件付確率密度関数と推定式

### a) 条件付確率密度関数

( $n-1$ )箇所の地表地動の確率変数ベクトル $X_{n-1}$ が与えられた条件下において,  $n$ 地点の地表地動と地盤増幅度の確率変数 $x_n, a_n$ に関する条件付確率密度関数は, 式(25)より, 次式のように求められる。

$$\begin{aligned} f_2(x_n, a_n | X_{n-1}) &= \frac{1}{2\pi |Q_2|^{\frac{1}{2}} x_n a_n} \\ &\cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x_{en} - 2\lambda_{x_n|c} \\ a_{en} - 2\lambda_{a_n|c} \end{Bmatrix}^T \right. \\ &\quad \left. \cdot Q_2^{-1} \begin{Bmatrix} x_{en} - 2\lambda_{x_n|c} \\ a_{en} - 2\lambda_{a_n|c} \end{Bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

ここで,

$$2\lambda_{x_n|c} = \lambda_{x_n} + C'^T_{X_{n-1} x_n} C'^{-1}_{X_{n-1} X_{n-1}} (X_{en-1} - \lambda_{X_{n-1}}) \quad (29.a)$$

$$2\lambda_{a_n|c} = \lambda_{a_n} + C'^T_{X_{n-1} a_n} C'^{-1}_{X_{n-1} X_{n-1}} (X_{en-1} - \lambda_{X_{n-1}}) \quad (29.b)$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 2\zeta_{x_n|c}^2 & 2C'_{x_n a_n|c} \\ 2C'^T_{x_n a_n|c} & 2\zeta_{a_n|c}^2 \end{bmatrix} \quad (29.c)$$

$$2\zeta_{x_n|c}^2 = \zeta_{x_n}^2 - C'^T_{X_{n-1} x_n} C'^{-1}_{X_{n-1} X_{n-1}} C'_{X_{n-1} x_n} \quad (29.d)$$

$$2\zeta_{a_n|c}^2 = \zeta_{a_n}^2 - C'^T_{X_{n-1} a_n} C'^{-1}_{X_{n-1} X_{n-1}} C'_{X_{n-1} a_n} \quad (29.e)$$

$$2C'_{x_n a_n|c} = C'_{x_n a_n} - C'^T_{X_{n-1} x_n} C'^{-1}_{X_{n-1} X_{n-1}} C'_{X_{n-1} a_n} \quad (29.f)$$

式(28)を用いると,  $n$ 地点直下における基盤地動 $y_n$ の条件付確率密度関数は,  $y_n = x_n/a_n$ より次のように

表わせる。

$$\begin{aligned}
 f_2(y_n|X_{n-1}) &= \int_0^\infty a_n f_2(y_n a_n, a_n|X_{n-1}) da_n \\
 &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{2\pi|Q_2|^{\frac{1}{2}} y_n} \\
 &\quad \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} a_{e_n} - 2\lambda_{x_n|c} + y_{e_n} \\ a_{e_n} - 2\lambda_{a_n|c} \end{Bmatrix}^T \right. \\
 &\quad \left. \cdot Q_2^{-1} \begin{Bmatrix} a_{e_n} - 2\lambda_{x_n|c} + y_{e_n} \\ a_{e_n} - 2\lambda_{a_n|c} \end{Bmatrix} \right] da_{e_n} \quad (30)
 \end{aligned}$$

ただし,  $a_{e_n} = \ln a_n, y_{e_n} = \ln y_n$  と変数を変換している。  
上式の指数部は  $Q_2^{-1}$  が

$$Q_2^{-1} = \frac{1}{|Q_2|} \begin{bmatrix} 2\zeta_{a_n|c}^2 & -2C'_{x_n a_n|c} \\ -2C'_{x_n a_n|c} & 2\zeta_{x_n|c}^2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

となることを考慮すると, 次のようになる。

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \begin{matrix} a_{e_n} - 2\lambda_{x_n|c} + y_{e_n} \\ a_{e_n} - 2\lambda_{a_n|c} \end{matrix} \right\}^T Q_2^{-1} \begin{Bmatrix} a_{e_n} - 2\lambda_{x_n|c} + y_{e_n} \\ a_{e_n} - 2\lambda_{a_n|c} \end{Bmatrix} \\
 &= \frac{2\zeta_{y_n|c}^2}{|Q_2|} \left[ a_{e_n} - \frac{1}{2\zeta_{y_n|c}^2} \left\{ 2\zeta_{a_n|c}^2 (2\lambda_{x_n|c} - y_{e_n}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2C'_{x_n a_n|c} (2\lambda_{x_n|c} + 2\lambda_{a_n|c} - y_{e_n}) + 2\zeta_{x_n|c}^2 2\lambda_{a_n|c} \right\} \right]^2 \\
 &\quad + \left( \frac{y_{e_n} - 2\lambda_{y_n|c}}{2\zeta_{y_n|c}} \right)^2 \quad (32)
 \end{aligned}$$

ここに,

$$2\lambda_{y_n|c} = 2\lambda_{x_n|c} - 2\lambda_{a_n|c} \quad (33.a)$$

$$2\zeta_{y_n|c}^2 = 2\zeta_{x_n|c}^2 + 2\zeta_{a_n|c}^2 - 2C'_{x_n a_n|c} \quad (33.b)$$

式(32)右辺第1項を  $t^2$  とおき,

$$\frac{dt}{da_{e_n}} = \frac{2\zeta_{y_n|c}}{|Q_2|^{\frac{1}{2}}} \quad (34)$$

を利用すると, 最終的に確率変数  $y_n$  の条件付確率密度関数  $f_2(y_n|X_{n-1})$  は次のように表わせる。

$$\begin{aligned}
 f_2(y_n|X_{n-1}) &= \frac{1}{2\pi_2 \zeta_{y_n|c} y_n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{y_{e_n} - 2\lambda_{y_n|c}}{2\zeta_{y_n|c}} \right)^2 \right\} \\
 &\quad \cdot \int_{-\infty}^\infty \exp \left( -\frac{1}{2} t^2 \right) dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi_2} \zeta_{y_n|c} y_n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln y_n - 2\lambda_{y_n|c}}{2\zeta_{y_n|c}} \right)^2 \right\} \quad (35)
 \end{aligned}$$

#### b) 最適推定量と推定誤差分散

式(35)は条件付対数正規分布になっている。 $\ln y_n$  の条件付平均値は式(33.a)の  $2\lambda_{y_n|c}$ , その条件付分散は式(33.b)の  $2\zeta_{y_n|c}^2$  である。これらを用いると, 基盤地動の最適推定量  $2\hat{y}_{n|c}$  は次のように求められる。

$$2\hat{y}_{n|c} = \int_0^\infty y_n f_2(y_n|X_{n-1}) dy_n$$

$$= \frac{2\mu_{x_n|c}}{2\mu_{a_n|c}} \exp(2\zeta_{a_n|c}^2 - 2C'_{x_n a_n|c}) \quad (36)$$

ただし,  $2\mu_{x_n|c}$  は  $\ln x_n$  の条件付平均値  $2\lambda_{x_n|c}$  (式(29.a)), 条件付分散  $2\zeta_{x_n|c}^2$  (式(29.d)) から得られる  $x_n$  の条件付平均値であり, 式(37.a)のようになる。同様に  $2\mu_{a_n|c}$  は  $\ln a_n$  の条件付平均値  $2\lambda_{a_n|c}$  (式(29.b)), 条件付分散  $2\zeta_{a_n|c}^2$  (式(29.e)) から求められ,  $a_n$  の条件付平均値 (式(37.b)) を意味する。

$$2\mu_{x_n|c} = \exp \left( 2\lambda_{x_n|c} + \frac{1}{2} 2\zeta_{x_n|c}^2 \right) \quad (37.a)$$

$$2\mu_{a_n|c} = \exp \left( 2\lambda_{a_n|c} + \frac{1}{2} 2\zeta_{a_n|c}^2 \right) \quad (37.b)$$

今, 地表地動と地盤増幅度の相関性を無視すると,  $C'_{X_{n-1} a_n} = 0$  であるから,  $2C'_{x_n a_n|c} = 0, 2\lambda_{a_n|c} = \lambda_{a_n}, 2\zeta_{a_n|c}^2 = \zeta_{a_n}^2$  となる。従ってこの場合には  $2\lambda_{y_n|c} = 2\lambda_{x_n|c} - \lambda_{a_n}$ , さらに  $C'_{x_n a_n} = 0$  より  $2\zeta_{y_n|c}^2 = 2\zeta_{x_n|c}^2 + \zeta_{a_n}^2$  となるから, 式(35)の条件付確率密度関数は式(6)と, 式(36)の最適推定量は式(8)と完全に一致する。

式(36)の最適推定量  $2\hat{y}_{n|c}$  の推定精度は式(12)の誘導と同様な考え方を適用すると,

$$2\hat{\sigma}_{n|c}^2 = \mu_{y_n}^2 \exp(\zeta_{y_n}^2) \{1 - \exp(-2\zeta_{y_n|c}^2)\} \quad (38)$$

の推定誤差分散によって評価できる。ただし,  $\mu_{y_n}, \zeta_{y_n}^2$  は式(13)から求められる。

## 5. 地表・地中記録と地盤増幅度の相関性を考慮した基盤地動の推定

前章までは, 地表で観測される地動記録のみを用いて基盤地動を推定する条件付対数正規確率場の推定理論を提案した。本章では推定精度をさらに高めるため, 地表だけではなく鉛直アレー地震観測などによって得られる基盤の記録をも同時に活用し, 基盤地動の空間分布を推定する方法について述べる。5.(1)では地表と地中の地震記録が鉛直アレーによって同時に観測されるとき, 5.(2)ではより現実的な対応をするため, 地表・地中記録数が異なる, すなわち地中記録よりも地表記録の数が多いたときの推定問題を取り扱う。

### (1) 地表・地中記録の同時観測

#### a) 地表地動と地盤増幅度の条件付結合確率密度関数

( $n-1$ ) 箇所における地表地動の確率変数ベクトルを  $X_{n-1} = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}^T$ , 地盤増幅度に関する確率変数ベクトルを  $A_{n-1} = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}^T$ ,  $n$  地点の地表地動に関する確率変数を  $x_n$ , 同地盤増幅度に関するものを  $a_n$  とし, これらを式(39.a)のベクトル  $Z_n$  で表す。さらに,  $x_{e_i} = \ln x_i, a_{e_i} = \ln a_i (i = 1 \sim n-1)$  よりなるベクトル  $X_{e_{n-1}} = \{x_{e_1}, \dots, x_{e_{n-1}}\}^T$ ,  $A_{e_{n-1}} = \{a_{e_1}, \dots, a_{e_{n-1}}\}^T$ , さらに変数  $x_{e_n} = \ln x_n$ ,

$a_{e_n} = \ln a_n$ を用いて、式(39.b)のベクトル $Z_{e_n}$ を定義する。 $Z_{e_n}$ の無条件平均値ベクトル $\lambda_{Z_n}$ は式(39.c)、その無条件共分散行列 $C'_{Z_n Z_n}$ は式(39.d)で表わせる。

$$\begin{aligned} Z_n^T &= \{X_{n-1}^T, A_{n-1}^T, x_n, a_n\} \\ &= \{Z_{n-1}^T, x_n, a_n\} \\ &= \{Z_{n-1}^T, F^T\} \end{aligned} \quad (39.a)$$

$$\begin{aligned} Z_{e_n}^T &= \{X_{e_{n-1}}^T, A_{e_{n-1}}^T, x_{e_n}, a_{e_n}\} \\ &= \{Z_{e_{n-1}}^T, x_{e_n}, a_{e_n}\} \\ &= \{Z_{e_{n-1}}^T, F_e^T\} \end{aligned} \quad (39.b)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{Z_n}^T &= \{\lambda_{X_{n-1}}^T, \lambda_{A_{n-1}}^T, \lambda_{x_n}, \lambda_{a_n}\} \\ &= \{\lambda_{Z_{n-1}}^T, \lambda_{x_n}, \lambda_{a_n}\} \\ &= \{\lambda_{Z_{n-1}}^T, \lambda_F^T\} \end{aligned} \quad (39.c)$$

$$C'_{Z_n Z_n} = \begin{bmatrix} C'_{Z_{n-1} Z_{n-1}} & C'_{Z_{n-1} F} \\ C'^T_{Z_{n-1} F} & C'_{FF} \end{bmatrix} \quad (39.d)$$

本項では、まず確率変数ベクトル $X_{n-1}, A_{n-1}$ が与えられた、言い換えれば地表地動の $X_{n-1}$ と基盤地動の $Y_{n-1} = \{y_1, \dots, y_{n-1}\}^T$  ( $y_i = x_i/a_i$ ) が与えられた条件下において、確率変数としての地表地動 $x_n$ と地盤増幅度 $a_n$ の条件付結合確率密度関数を導く。

今、 $Z_n$ ならびに $Z_{n-1}$ の結合確率密度関数はおのおの

$$\begin{aligned} f(Z_n) &= \frac{1}{(2\pi)^n |C'_{Z_n Z_n}|^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^n x_i a_i} \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Z_{e_n} - \lambda_{Z_n})^T C'^{-1}_{Z_n Z_n} (Z_{e_n} - \lambda_{Z_n}) \right\} \end{aligned} \quad (40.a)$$

$$\begin{aligned} f(Z_{n-1}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n-1} |C'_{Z_{n-1} Z_{n-1}}|^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} x_i a_i} \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Z_{e_{n-1}} - \lambda_{Z_{n-1}})^T C'^{-1}_{Z_{n-1} Z_{n-1}} \right. \\ &\quad \left. (Z_{e_{n-1}} - \lambda_{Z_{n-1}}) \right\} \end{aligned} \quad (40.b)$$

であるから、 $x_n, a_n$ の条件付結合確率密度関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} f_3(x_n, a_n | X_{n-1}, A_{n-1}) &= f(Z_n) / f(Z_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2\pi \left( \frac{|C'_{Z_n Z_n}|}{|C'_{Z_{n-1} Z_{n-1}}|} \right)^{\frac{1}{2}} x_n a_n} \\ &\cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ (Z_{e_n} - \lambda_{Z_n})^T C'^{-1}_{Z_n Z_n} (Z_{e_n} - \lambda_{Z_n}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (Z_{e_{n-1}} - \lambda_{Z_{n-1}})^T C'^{-1}_{Z_{n-1} Z_{n-1}} (Z_{e_{n-1}} - \lambda_{Z_{n-1}}) \right\} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

$n$ 地点における地表地動 $x_n$ と地盤増幅度 $a_n$ に関する条件付結合確率密度関数は式(41)に4.(1)の式(25)の誘導過程(付録Bの諸式)と同様な手続を施せば、最終的に次のように求められる。

$$f_3(x_n, a_n | X_{n-1}, A_{n-1}) = \frac{1}{2\pi |Q_3|^{\frac{1}{2}} x_n a_n}$$

$$\cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x_{e_n} - 3\lambda_{x_n|c} \\ a_{e_n} - 3\lambda_{a_n|c} \end{Bmatrix}^T \cdot Q_3^{-1} \begin{Bmatrix} x_{e_n} - 3\lambda_{x_n|c} \\ a_{e_n} - 3\lambda_{a_n|c} \end{Bmatrix} \right] \quad (42)$$

ここに、

$$3\lambda_{x_n|c} = \lambda_{x_n} + C'^T_{Z_{n-1} x_n} C'^{-1}_{Z_{n-1} Z_{n-1}} (Z_{e_{n-1}} - \lambda_{Z_{n-1}}) \quad (43.a)$$

$$3\lambda_{a_n|c} = \lambda_{a_n} + C'^T_{Z_{n-1} a_n} C'^{-1}_{Z_{n-1} Z_{n-1}} (Z_{e_{n-1}} - \lambda_{Z_{n-1}}) \quad (43.b)$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 3\zeta_{x_n|c}^2 & 3C'_{x_n a_n|c} \\ 3C'^T_{x_n a_n|c} & 3\zeta_{a_n|c}^2 \end{bmatrix} \quad (44.a)$$

ただし、

$$3\zeta_{x_n|c}^2 = \zeta_{x_n}^2 - C'^T_{Z_{n-1} x_n} C'^{-1}_{Z_{n-1} Z_{n-1}} C'_{Z_{n-1} x_n} \quad (44.b)$$

$$3\zeta_{a_n|c}^2 = \zeta_{a_n}^2 - C'^T_{Z_{n-1} a_n} C'^{-1}_{Z_{n-1} Z_{n-1}} C'_{Z_{n-1} a_n} \quad (44.c)$$

$$3C'_{x_n a_n|c} = C'_{x_n a_n} - C'^T_{Z_{n-1} x_n} C'^{-1}_{Z_{n-1} Z_{n-1}} C'_{Z_{n-1} a_n} \quad (44.d)$$

式(43.a)の $3\lambda_{x_n|c}$ 、式(43.b)の $3\lambda_{a_n|c}$ はおのおの条件付正規確率場における $x_n, a_n$ の条件付平均値である。式(44.a)の $Q_3$ は $x_n, a_n$ に関する条件付共分散行列を意味する。式(44.b)の $3\zeta_{x_n|c}^2$ は $x_n$ の条件付分散、式(44.c)の $3\zeta_{a_n|c}^2$ は $a_n$ の条件付分散、式(44.d)の $3C'_{x_n a_n|c}$ は $x_n$ と $a_n$ の条件付共分散である。

#### b) 基盤地動の条件付確率密度関数と推定式

$n$ 地点直下の基盤地動 $y_n = x_n/a_n$ に関する条件付確率密度関数は式(42)を用いると、次のようになる。

$$\begin{aligned} f_3(y_n | X_{n-1}, A_{n-1}) &= \int_0^\infty a_n f_3(y_n a_n, a_n | X_{n-1}, A_{n-1}) da_n \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{2\pi |Q_3|^{\frac{1}{2}} y_n} \\ &\cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} a_{e_n} - 3\lambda_{x_n|c} + y_{e_n} \\ a_{e_n} - 3\lambda_{a_n|c} \end{Bmatrix}^T \right. \\ &\quad \left. \cdot Q_3^{-1} \begin{Bmatrix} a_{e_n} - 3\lambda_{x_n|c} + y_{e_n} \\ a_{e_n} - 3\lambda_{a_n|c} \end{Bmatrix} \right] da_{e_n} \end{aligned} \quad (45)$$

ただし、 $a_{e_n} = \ln a_n, y_{e_n} = \ln y_n$ と変数を変換している。ところで式(45)の指数部は

$$3\lambda_{y_n|c} = 3\lambda_{x_n|c} - 3\lambda_{a_n|c} \quad (46.a)$$

$$3\zeta_{y_n|c}^2 = 3\zeta_{x_n|c}^2 + 3\zeta_{a_n|c}^2 - 2_3C'_{x_n a_n|c} \quad (46.b)$$

を用いると、

$$\begin{Bmatrix} a_{e_n} - 3\lambda_{x_n|c} + y_{e_n} \\ a_{e_n} - 3\lambda_{a_n|c} \end{Bmatrix}^T Q_3^{-1} \begin{Bmatrix} a_{e_n} - 3\lambda_{x_n|c} + y_{e_n} \\ a_{e_n} - 3\lambda_{a_n|c} \end{Bmatrix}$$



$$= \frac{3\zeta_{y_n|c}^2}{|Q_3|} \left[ a_{e_n} - \frac{1}{3\zeta_{y_n|c}^2} \left\{ 3\zeta_{a_n|c}^2 (3\lambda_{x_n|c} - y_{e_n}) - 3C'_{x_n a_n|c} (3\lambda_{x_n|c} + 3\lambda_{a_n|c} - y_{e_n}) + 3\zeta_{x_n|c}^2 3\lambda_{a_n|c} \right\} \right]^2 + \left( \frac{y_{e_n} - 3\lambda_{y_n|c}}{3\zeta_{y_n|c}} \right)^2 \quad (47)$$

となる。式(47)右辺第1項を $t^2$ とおき、

$$\frac{dt}{da_{e_n}} = \frac{3\zeta_{y_n|c}}{|Q_3|^{\frac{1}{2}}} \quad (48)$$

を利用すると、式(45)は次のように条件付対数正規分布で表わせる。

$$f_3(y_n|X_{n-1}, A_{n-1}) = \frac{1}{2\pi_3\zeta_{y_n|c}y_n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{y_{e_n} - 3\lambda_{y_n|c}}{3\zeta_{y_n|c}} \right)^2 \right\} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{1}{2}t^2 \right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi_3\zeta_{y_n|c}y_n}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln y_n - 3\lambda_{y_n|c}}{3\zeta_{y_n|c}} \right)^2 \right\} \quad (49)$$

ただし、 $\ln y_n$ の条件付平均値は式(46.a)、その条件付分散は式(46.b)のようである。

式(49)を用いると、基盤地動の最適推定量は次式のように求められる。

$$3\hat{y}_n|c = \int_0^{\infty} y_n f_3(y_n|X_{n-1}, A_{n-1}) dy_n = \frac{3\mu_{x_n|c}}{3\mu_{a_n|c}} \exp(3\zeta_{a_n|c}^2 - 3C'_{x_n a_n|c}) \quad (50)$$

ここで $3\mu_{x_n|c}, 3\mu_{a_n|c}$ は $x_n, a_n$ の条件付平均値であり、式(43.a), (43.b), (44.b), (44.c)を用いて次式で表わせる。

$$3\mu_{x_n|c} = \exp \left( 3\lambda_{x_n|c} + \frac{1}{2}3\zeta_{x_n|c}^2 \right) \quad (51.a)$$

$$3\mu_{a_n|c} = \exp \left( 3\lambda_{a_n|c} + \frac{1}{2}3\zeta_{a_n|c}^2 \right) \quad (51.b)$$

今、地表地動ならびに地盤増幅度の観測値 $X_{n-1}, A_{n-1}$ あるいは地表・地中の同時記録 $X_{n-1}, Y_{n-1} = \{y_1, \dots, y_{n-1}\}^T$  ( $y_i = x_i/a_i$ ) が得られると、式(50)によって基盤の任意地点における最大地動の空間分布を推定することができる。ただし計算に当たって確率変数 $x_i, a_i$ の代わりに観測値 $x_i, a_i$  ( $i = 1 \sim n-1$ )を用いる必要がある。

式(50)の最適推定量 $3\hat{y}_n|c$ の推定精度は次式の推定誤差分散を用いることによって求められる。

$$3\hat{\sigma}_{n|c}^2 = \mu_{y_n}^2 \exp(\zeta_{y_n}^2) \{1 - \exp(-3\zeta_{y_n|c}^2)\} \quad (52)$$

## (2) 地表・地中記録数が異なるとき

### a) 基盤地動の条件付確率密度関数

地表の $(n-1)$ 箇所地動 $X_{n-1} = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}^T$ が、さらに地中の $m$ 箇所 ( $m < n-1$ )で基盤地動 $Y_m =$

$\{y_1, \dots, y_m\}^T$ が、あるいは地表観測点直下の地盤増幅度 $A_m = \{a_1, \dots, a_m\}^T$ が与えられたケースを考える。この場合、確率変数 $X_{n-1}, A_m$ (あるいは $Y_m$ )が与えられた条件下において $n$ 地点での基盤地動 $y_n$ の条件付確率密度関数 $f_4(y_n|X_{n-1}, A_m)$ ならびに最適推定量 $4\hat{y}_n|c$ (条件 $c = X_{n-1}, A_m$ )は、5.(1)と同様の考え方を適用することにより求められる。以下にその最終的な結果のみを示す。

条件付確率密度関数 $f_4(y_n|X_{n-1}, A_m)$ は次のようである。

$$f_4(y_n|X_{n-1}, A_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi_4\zeta_{y_n|c}y_n}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln y_n - 4\lambda_{y_n|c}}{4\zeta_{y_n|c}} \right)^2 \right\} \quad (53)$$

ここに、 $4\lambda_{y_n|c}, 4\zeta_{y_n|c}^2$ は $X_{n-1}, A_m$ が与えられた条件下における未観測点での確率変数 $\ln y_n$ の条件付平均値、条件付分散である。これらは次式のように、 $\ln x_n, \ln a_n$ の条件付平均値 $4\lambda_{x_n|c}, 4\lambda_{a_n|c}$ 、その条件付分散 $4\zeta_{x_n|c}^2, 4\zeta_{a_n|c}^2$ で表わせる。

$$4\lambda_{y_n|c} = 4\lambda_{x_n|c} - 4\lambda_{a_n|c} \quad (54.a)$$

$$4\zeta_{y_n|c}^2 = 4\zeta_{x_n|c}^2 + 4\zeta_{a_n|c}^2 - 2C'_{x_n a_n|c} \quad (54.b)$$

$$4\lambda_{x_n|c} = \lambda_{x_n} + C'_{W x_n}{}^T C'_{W W}{}^{-1} (W_e - \lambda_W) \quad (54.c)$$

$$4\lambda_{a_n|c} = \lambda_{a_n} + C'_{W a_n}{}^T C'_{W W}{}^{-1} (W_e - \lambda_W) \quad (54.d)$$

ただし、式(54.b)の $4\zeta_{x_n|c}^2, 4\zeta_{a_n|c}^2, 4C'_{x_n a_n|c}$ 、式(54.c), (54.d)の右辺各項については以下に示す。

上式において、 $X_{e_{n-1}} = \{\ln x_1, \dots, \ln x_{n-1}\}^T$ 、 $A_{e_m} = \{\ln a_1, \dots, \ln a_m\}^T$ を用いて確率変数 $W_e^T = \{X_{e_{n-1}}^T, A_{e_m}^T\}$ を定義すると、 $W_e$ の無条件平均値ベクトルは $\lambda_W^T = \{\lambda_{X_{n-1}}^T, \lambda_{A_m}^T\}$ 、 $W_e$ と $\ln x_n$ の無条件共分散ベクトルは $C'_{W x_n}$ 、 $W_e$ と $\ln a_n$ の無条件共分散ベクトルは $C'_{W a_n}$ 、さらに $W_e$ 間の無条件共分散行列は $C'_{W W}$ で表わせる。式(54.b)の $4C'_{x_n a_n|c}$ は $\ln x_n$ と $\ln a_n$ の条件付共分散である。これらは次式のようになる。

$$C'_{W x_n}{}^T = \{C'_{X_{n-1} x_n}{}^T, C'_{A_m x_n}{}^T\} \quad (54.e)$$

$$C'_{W a_n}{}^T = \{C'_{X_{n-1} a_n}{}^T, C'_{A_m a_n}{}^T\} \quad (54.f)$$

$$C'_{W W} = \begin{bmatrix} C'_{X_{n-1} X_{n-1}} & C'_{X_{n-1} A_m} \\ C'_{X_{n-1} A_m}{}^T & C'_{A_m A_m} \end{bmatrix} \quad (54.g)$$

$$4C'_{x_n a_n|c} = C'_{x_n a_n} - C'_{W x_n}{}^T C'_{W W}{}^{-1} C'_{W a_n} \quad (54.h)$$

さらに式(54.b)に示す条件付分散 $4\zeta_{x_n|c}^2, 4\zeta_{a_n|c}^2$ は式(54.e)~(54.g)を用いることにより、

$$4\zeta_{x_n|c}^2 = \zeta_{x_n}^2 - C'_{W x_n}{}^T C'_{W W}{}^{-1} C'_{W x_n} \quad (54.i)$$

$$4\zeta_{a_n|c}^2 = \zeta_{a_n}^2 - C'_{W a_n}{}^T C'_{W W}{}^{-1} C'_{W a_n} \quad (54.j)$$

となる。

## b) 基盤地動の推定式

基盤地動の最適推定量は、式(53)を用いて $y_n$ の条件付平均値を求めることにより、次のように表わせる。ただし、同式の計算には式(54.c), (54.d), (54.h)~(54.j)を用いる必要がある。

$${}_4\hat{y}_{n|c} = \frac{{}_4\mu_{x_n|c}}{{}_4\mu_{a_n|c}} \exp({}_4\zeta_{a_n|c}^2 - {}_4C'_{x_n a_n|c}) \quad (55)$$

なお、これまでの議論と同様に ${}_4\mu_{x_n|c}, {}_4\mu_{a_n|c}$ は $x_n, a_n$ の条件付平均値であり、次のようである。

$${}_4\mu_{x_n|c} = \exp\left(4\lambda_{x_n|c} + \frac{1}{2}{}_4\zeta_{x_n|c}^2\right) \quad (56.a)$$

$${}_4\mu_{a_n|c} = \exp\left(4\lambda_{a_n|c} + \frac{1}{2}{}_4\zeta_{a_n|c}^2\right) \quad (56.b)$$

最適推定量 ${}_4\hat{y}_{n|c}$ (式(55))の推定精度はこれまでのケースと同様に次の推定誤差分散によって評価される。

$${}_4\hat{\sigma}_{n|c}^2 = \mu_{y_n}^2 \exp(\zeta_{y_n}^2) \{1 - \exp(-{}_4\zeta_{y_n|c}^2)\} \quad (57)$$

## (3) 特別な場合の最適推定値

a) 推定地点が地表・地中同時観測点の基盤に位置するとき

地表・地中で観測値 $X_{n-1}, A_m$ が実際に得られ、未観測点 $n$ が地表・地中同時観測点の一つ $i$ ( $0 \leq i \leq m$ )と一致したケースを考える。このとき式(54.c)のベクトル $C_{Wx_n}^T C_{WW}^{-1}$ は $i$ 成分が1で、他の成分は0、式(54.d)のベクトル $C_{Wa_n}^T C_{WW}^{-1}$ は $(n-1+i)$ 成分が1で、他の成分は0になる。従って式(54.c), (54.d), (54.h)~(54.j)は次のようになる。

$$\begin{aligned} {}_4\lambda_{x_i|c} &= \lambda_{x_i} + \ln \underline{x}_i - \lambda_{x_i} \\ &= \ln \underline{x}_i \end{aligned} \quad (58.a)$$

$$\begin{aligned} {}_4\lambda_{a_i|c} &= \lambda_{a_i} + \ln \underline{a}_i - \lambda_{a_i} \\ &= \ln \underline{a}_i \end{aligned} \quad (58.b)$$

$$\begin{aligned} {}_4\zeta_{x_i|c}^2 &= \zeta_{x_i}^2 - C'_{x_i} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (58.c)$$

$$\begin{aligned} {}_4\zeta_{a_i|c}^2 &= \zeta_{a_i}^2 - C'_{a_i} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (58.d)$$

$$\begin{aligned} {}_4C'_{x_i a_i|c} &= C'_{x_i a_i} - C'_{x_i a_i} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (58.e)$$

従って式(56.a)より ${}_4\mu_{x_i|c} = \underline{x}_i$ 、式(56.b)より ${}_4\mu_{a_i|c} = \underline{a}_i$ となるので、式(55)から推定値は ${}_4\hat{y}_{i|c} = \underline{x}_i / \underline{a}_i = y_i$ と求められる。すなわち地表地動ならびに地盤増幅度の観測値が確定的に与えられると、基盤地動の推定値 ${}_4\hat{y}_{i|c}$ は基盤の観測値 $y_i$ と完全に一致することになる。

b) 推定地点が地表観測点直下の基盤に一致するとき

未観測点 $i$ が $m < i \leq n-1$ の条件を満足するとき、最適推定値は次のようになる。このとき式(58.a), (58.c)は成り立つが、 ${}_4\lambda_{a_i|c}, {}_4\zeta_{a_i|c}^2, {}_4C'_{x_i a_i|c}$ は $\ln \underline{a}_i, 0, 0$ になら

ないので、基盤地動の推定値は式(55)から次のようになる。

$${}_4\hat{y}_{i|c} = \frac{\underline{x}_i}{{}_4\mu_{a_i|c}} \exp({}_4\zeta_{a_i|c}^2 - {}_4C'_{x_i a_i|c}) \quad (59)$$

ただし、

$${}_4\mu_{a_i|c} = \exp\left(4\lambda_{a_i|c} + \frac{1}{2}{}_4\zeta_{a_i|c}^2\right) \quad (60.a)$$

$${}_4\lambda_{a_i|c} = \lambda_{a_i} + C_{Wa_i}^T C_{WW}^{-1} (W_e - \lambda_W) \quad (60.b)$$

$${}_4\zeta_{a_i|c}^2 = {}_4\zeta_{a_i|c}^2 \quad (60.c)$$

$${}_4C'_{x_i a_i|c} = {}_4C'_{x_i a_i|c} \quad (60.d)$$

上述のように地表地動ならびに地盤増幅度の観測値が同時に与えられると、観測点直下の基盤地動はこれらデータを用いて確定的に計算できることになる。一方、地盤増幅度が未知のとき、基盤地動の最適推定値は式(55)のように地盤の不確定性を考慮した上で地表地動の観測値を補正することにより容易に求められる。観測点以外では地盤特性を確定的に与えることができないので、このときには本提案手法のように確率地盤の条件付推定問題を解く必要がある。

c) 他のケースとの対応

ケース4における基盤地動の最適推定値は式(55)で、その推定誤差分散は式(57)で与えられる。その際、地表地動と地盤増幅度に関して条件付正規確率場における条件付平均値(式(54.c), (54.d)), 条件付分散(式(54.i), (54.j)), 2変量間の条件付共分散(式(54.h))が必要である。その結果、基盤地動の正規確率場における条件付分散は式(54.b)となる。条件付対数正規確率場における地表地動と地盤増幅度の空間分布推定値はおのおの式(56.a), (56.b)のように表わせる。

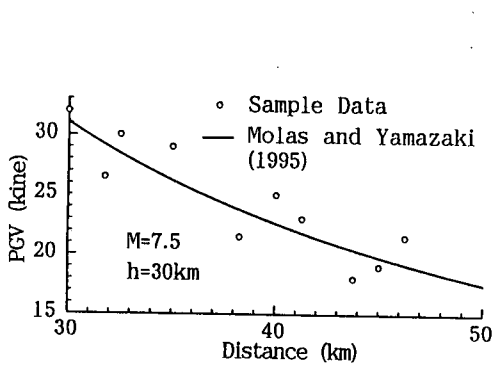
一方、ケース1, 2では式(54.c), (54.d)の $W_e, \lambda_W$ において $X_{e_{n-1}}, \lambda_{X_{n-1}}$ 、式(54.e)で $C'_{X_{n-1} x_n}$ 、式(54.f)で $C'_{X_{n-1} a_n}$ 、式(54.g)で $C'_{X_{n-1} X_{n-1}}$ のみが関与する。ケース1では式(54.f)の $C'_{X_{n-1} a_n}$ が0となる。ケース3ではケース4において $n = m$ として解析すればよい。すなわち上記ケース4の理論解は一般解として成立するものであり、ケース1~ケース3はその特殊解に相当していることがわかる。

## 6. 数値計算例および考察

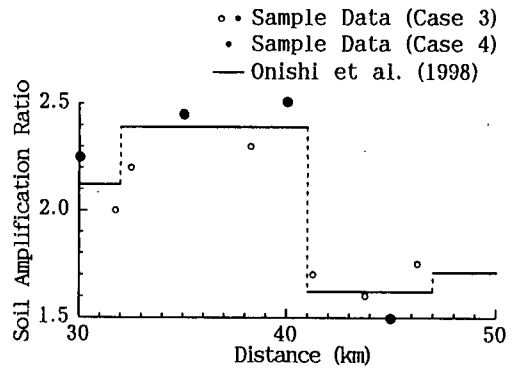
### (1) 数値条件

前章までに提案した4つのケースにおける推定結果の相違点ならびに提案手法の特徴を明らかにするため、地表地動の距離減衰式と地盤増幅度のモデルを用いた数値分析を行う。解析に当たっては2.(2)で述べた事前確率場ならびに観測条件を与えなければならない。

まず地表地動についてはMolas and Yamazaki<sup>9)</sup>によって提案された距離減衰式を利用する。ここでは地震動



(a) Peak ground velocity at free surface



(b) soil amplification ratio

Fig.1 Unconditional fields and observed data

指標のうち最大速度に注目した。その無条件平均値は

$$E[\log V(z)] = c_0 + c_1 M + c_2 r(z) - \log r(z) + c_3 h + c_4(z) \quad (61)$$

で与えられる。ここに $V(z)$ は $z$ 地点における地表面の最大速度(kine),  $M$ はマグニチュード,  $r(z)$ は断層面への最短距離(km),  $h$ は震源深さ(km)である。 $c_i(i=0\sim3)$ は回帰分析により求められた係数,  $c_4(z)$ は $z$ 地点における地点係数である。ここでは平均地盤を対象とした距離減衰式を用いるため,  $c_4(z) = 0$ とし, 地点係数による違いは地盤増幅度に反映させた。数値計算においては $c_0 = -1.769$ ,  $c_1 = 0.628$ ,  $c_2 = -0.0013$ ,  $c_3 = 0.00222$ の回帰係数値を用いた。またマグニチュードは7.5, 震源深さは30kmに設定した。式(61)のばらつき(標準偏差)は0.257と求められているので, この値を用いて無条件分散 $\zeta_v^2$ を決定した。

地盤増幅度の算定に当たっては2.で述べたように高密度のボーリングデータに基づいた重複反射理論あるいは常時微動・強震記録の分析により, 周波数特性を活かした評価を行うことが可能である。例えば文献7)では強震記録の分析結果から, 対数正規確率変数としての地盤増幅度の簡易推定法を提案している。その推定結果はばらつきを伴っているが, このような解析を多地点で行えば, 無条件場における地盤増幅度の空間特性を確率的に決められるかもしれない。しかしながら著者らの知る限り, 地盤増幅度の空間的なモデル化を精度よく行った事例は現時点では見当たらない。そこでここでは提案手法の意義を数値分析によって確認することを主目的として, 以下に示すように地盤条件によって異なる増幅度を与える考え方を採用した。

大西・山崎・若松<sup>6)</sup>は, 式(61)の距離減衰式において地点ごとの相対的な揺れ易さを表す地点係数と土地分類基本調査等によって調べた土地分類との関係を整理した。その上で国土数値情報の地形・地質データから

地震動指標値の地盤増幅度を求めている。それによれば, 最大速度の増幅度は, 埋立地, 砂州・砂丘, 三角州性低地(泥), 三角州性低地(砂まじり), 扇状地性低地, 火山灰台地, 砂礫台地, 岩石台地, 丘陵地, 火山山麓地・台地, 山地のおおのにおいて, 2.12, 2.12, 2.92, 2.39, 1.48, 2.50, 1.62, 1.34, 1.71, 1.91, 1.00の値となっている。そこで地盤増幅度 $a_i$ の無条件平均値にはこの値を採用した。地形・表層地質による11分類のデータ地点数は多くなかったので, 無条件分散を正確に議論することができない。このため無条件標準偏差 $\zeta_a$ については山地では0とするが, 他の地形・表層地質では同一とし, 0.25を与えた。

一方, 地表面における最大速度あるいは地盤増幅度の空間相関特性(共分散)およびこれら2変量間の相互共分散に関する定量的な研究はこれまでほとんど行われていないが, その関数表示, 相関距離は観測点配置, 地震動特性などに依って決まるものである。そこで, 地表地動の最大速度, 地盤増幅度の共分散 $C'_{V_{ij}}, C'_{a_{ij}}$ , 2変量間の相互共分散 $C'_{V_{i,a_j}}$ については次のようにおのの指数関数型で仮定した。

$$C'_{V_{ij}} = \zeta_v^2 \exp\left(-\frac{\|z_i - z_j\|}{l_v}\right) \quad (62.a)$$

$$C'_{a_{ij}} = \zeta_a^2 \exp\left(-\frac{\|z_i - z_j\|}{l_a}\right) \quad (62.b)$$

$$C'_{V_{i,a_j}} = \rho'_{V_a} \zeta_v \zeta_a \exp\left(-\frac{\|z_i - z_j\|}{l_{V_a}}\right) \quad (62.c)$$

ここに,  $\rho'_{V_a}$ は正規確率場における地表面の最大速度と地盤増幅度間の相関係数,  $l_v, l_a, l_{V_a}$ は相関距離(km)である。

相関距離の大きさは2地点における地動特性値の相関性を左右する。任意地点の最適推定値の計算においては相関距離が大きいほど, ある範囲に位置する観測値の影響を受け易い。逆に相関距離が小さいと, 観測値にはほとんど左右されなくなり, 推定値は与えた無条件平

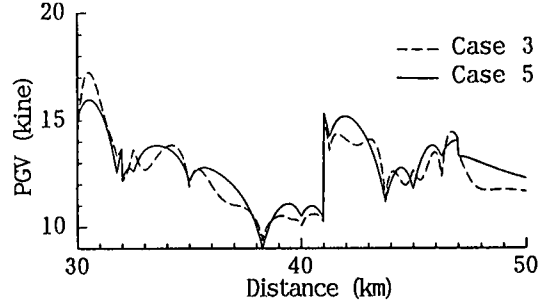
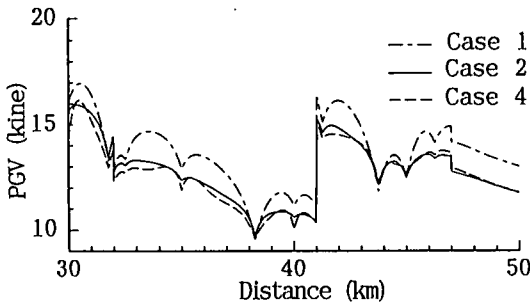


Fig.2 Optimal estimates

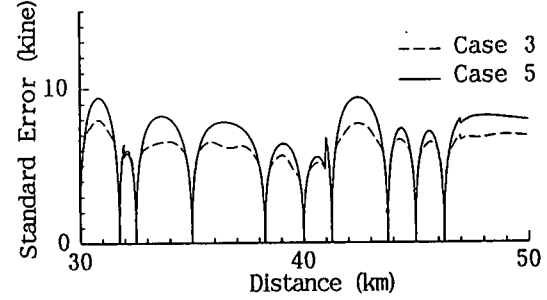
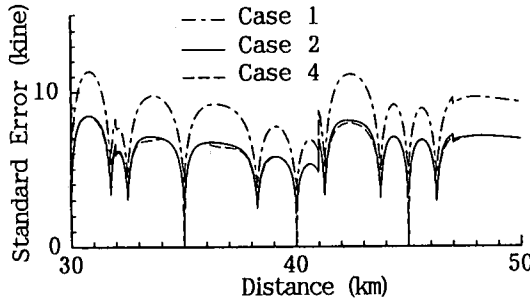


Fig.3 Estimation error deviations

均場に近づく。また相関距離が大きすぎると、推定値は無条件平均値に関係なく、観測値間を単純に結んだ値で表わせることになる。よって相関距離の与え方は推定問題において重要である。ここでは提案理論の妥当性を検証することが第一目的なので、 $l_v = l_a = l_{v_a} = 1.0$ を仮定した。また相関係数 $\rho_{v_a}$ については0と0.7の2つを与えた。

Fig.1(a)は断面への最短距離が30kmから50kmの範囲における地表地動の平均的な距離減衰値を示したものである。またFig.1(b)は4種類の地形・表層地質に応じた平均的な地盤増幅度の分布である。理論解の検討を容易に行うことができるように、簡単のため1次元の確率場を対象とした。

横浜市のREADYや東京ガスのSUPREMEの高密度地震計ネットワークの配置密度を参考にし、地表地震計の観測点は10箇所を設定した。地盤増幅度の観測に必要な地中観測点は地表観測点直下の基盤にケース3で10箇所、ケース4で4箇所ある。仮定した無条件確率場の特性ならびに観測点配置に応じ、シミュレーションによってサンプル値を求めた。○印あるいは●印によって事前に与えた観測値(地表面の最大速度、地盤増幅度)をFig.1に示す。

## (2) 分析結果

4ケースの数値計算結果の比較分析のため、基盤面における最大速度の最適推定値をFig.2に、その推定誤差標準偏差をFig.3に示す。図中、ケース5は地盤増幅度の不確定性を考慮しないときの、すなわちケース1(地表地動と地盤増幅度間の独立性の仮定下)における推定式(4)、(7.b)、(8)、(9)、(12)、(13)において $\zeta_{a_n}^2 = 0$ としたときの結果である(3.(3)b)参照のこと)。このケースにおける推定の手続は山崎<sup>4)</sup>が基盤地動の空間分布を推定するのに用いた考え方と基本的に同一である。この場合にはFig.1(b)に示した平均的な地盤増幅度を観測値と見なすことになる。このことは10箇所在地中地震計が見かけ上存在すると仮定するものであり、地盤増幅度を確定的に与えることを意味する。

本計算例ではFig.1(a)に示すように地表地動における無条件平均値の距離変化を滑らかに仮定した。一方でFig.1(b)に示すように無条件平均場の地盤条件はある空間位置においてステップ的に変化している。このためこの変化地点近傍における基盤地動の最適推定値、推定誤差はともに不連続になっている。一般には不均質な地表層に影響を受ける地表よりも、その影響を受けない基盤において最大地動の空間分布が滑らかに変化することが考えられる。つまりFig.1(a)に示す空間変化のように基盤地動も無条件場で震央距離とともに滑らかに減少するかもしれない。この例ではFig.2のよう

な基盤地動の条件付推定値を与えるような地震に対し、Fig.1(b)のような地盤増幅度の無条件平均値を仮定したとき、Fig.1(a)のような地表地動の観測記録が得られる状況を想定していると考えればよい。Fig.2の条件付推定値が空間的に滑らかに変化しないのはFig.1(a)のように地表地動の無条件平均値を仮定したことによる。この現象は無条件確率場と条件付確率場の関係を考えれば特異なことではない。

Fig.2より、既に理論的に分析してきた事実が数値的にも生起していることが理解できる。すなわちケース3, 4, 5に見られるように、地表・地中地震記録が同時に得られた場合にはその観測点における基盤地動の推定誤差は0となり、最適推定値は観測値( $\underline{x}_i/a_i$ )と完全に一致している。ただしケース5では地中地震記録が実際に得られるのではなく、地表面で観測された最大速度を与えた地盤増幅度で割り、その値を基盤面地動のサンプル値と仮定している。

一方、観測点から離れるに従って、ケース*i*の推定誤差分散は基盤面地動の無条件分散(式(63))に近づいていることがわかる。

$$i\sigma_n^2 = i\hat{y}_n^2 \{ \exp(i\zeta_{y_n}^2) - 1 \} \quad (63)$$

ここに、

$$i\hat{y}_n = \frac{\mu_{x_n}}{\mu_{a_n}} \exp(\zeta_{a_n}^2 - iC'_{x_n a_n}) \quad (64.a)$$

$$i\zeta_{y_n}^2 = \zeta_{x_n}^2 + \zeta_{a_n}^2 - 2iC'_{x_n a_n} \quad (64.b)$$

ただし $\mu_{a_n}$ は式(9.b)より、 $\mu_{x_n}$ は同式において $\mu_{a_n}$ 、 $\lambda_{a_n}$ 、 $\zeta_{a_n}^2$ の代わりに $\mu_{x_n}$ 、 $\lambda_{x_n}$ 、 $\zeta_{x_n}^2$ とおくことにより求められる。いずれのケースにおいても観測値の影響が小さくなると、基盤面における最大速度の最適推定値は無条件平均値(式(64.a))に近づくことがわかる。

最適推定値の挙動を定量的に評価できる指標は推定誤差分散である。そこで次に観測点間ならびに観測点近傍での推定誤差について比較検討する。

内外挿地点における推定誤差はケース3よりもケース5において大きい。ケース5では地盤増幅度が確定量であり、地表面の最大速度と地盤条件の因果関係が考慮されていない。この場合は式(46.b)、(52)において $3\zeta_{a_n|c}^2 = 3C'_{x_n a_n|c} = 0$ としたときの推定誤差分散に相当する。ケース3とケース5の比較結果は、地表面における最大地動の不確実性だけでなく、地震動の大きさを左右する表層地盤の不確実性ならびにその増幅度との相互関係を考慮することにより、推定精度が高まることを示唆している。このことは、異種情報の観測値が混合する場合、これら情報を有効に活用できる確率論的補間理論の意義を示していると言えよう。

ケース3とケース4では地中地震計の設置数が異なるので、ケース4での地表観測点直下の基盤面における推定誤差は必ずしも0になっていない。地表観測点*i*の直

下に地中地震計がない場合、既に5.(3)で述べたように $4\zeta_{x_i|c}^2$ は0に一致するが、 $4\zeta_{a_i|c}^2$ 、 $4C'_{x_i a_i|c}$ は0とはならない。この場合の推定誤差分散は次のようになる。

$$4\hat{\sigma}_{i|c}^2 = \mu_{y_i}^2 \exp(\zeta_{y_i}^2) \{ 1 - \exp(24C'_{x_i a_i|c} - 4\zeta_{a_i|c}^2) \} \quad (65)$$

その結果、Fig.3のケース4に示すように、6地点における基盤地動の推定誤差分散はケース3の如く0とはならず、上式から求められる非零値となる。推定誤差分散は0とはならないが、同地点には地表地震計があるため、観測点から離れた遠方場に比べると、推定精度はよくなっている。

ケース1の推定精度は他のケースに比べてよくない。地盤の不確実性は考慮されているが、地表地動と増幅度で代表される表層地盤間には相関性が導入されていない。線形・非線形地盤によらず、物理的には両特性値間に相関関係を有すると考えるのが自然であろう。このような相互相関性を考慮することにより、ケース2の推定誤差分散(式(29.d)~(29.f)、(33.b)、(38))はケース1に比べて小さくなっている。観測点から離れた内外挿地点における推定精度の向上が特に顕著である。これは式(7.b)と式(33.b)の比較からわかるように、式(33.b)において $2\zeta_{a_n|c}^2$ が $\zeta_{a_n}^2$ に等しくはなく、かつ $2C'_{x_n a_n|c}$ が0ではないためである。Fig.3に示すように、ケース4ではケース1, 2に比べて4箇所の地表・地中観測点が存在するため、その推定誤差はケース1, 2の結果に比べてさらに小さい。推定誤差はどの空間位置においてもケース1, 2, 4の順に小さくなっている。

推定精度が悪い場合、ケース1の最適推定値は空間的に大いに変動している。ケース5の基盤面地動は10箇所における見かけ上のサンプル値を通るように補間されているが、ケース1と同様に変動が激しい。ケース2の推定値は空間的な相互依存性が考慮されているため、ケース1の結果に比べて滑らかになっている。観測点で推定値と観測値が一致しているのは同様であるが、ケース3, 4では内外挿地点における推定値のばらつきが小さくなっている。このことは確率場における空間的な相互相関性の重要性を改めて意味するものである。

## 7. 結論

本論文では、確率地盤において得られた地震動指標値の観測記録(地表・地中)を基にして基盤面における地震動指標値の空間分布を合理的に推定する条件付対数正規確率場の理論を導き、理論解の意味について検討した。さらに地震動指標値の距離減衰式ならびに地盤増幅度のモデルに基づき、数値分析を行うことにより、提案手法の有効性について吟味した。理論ならびに数値解析は次の5ケースについて実施した。

A) 地表地動の観測値のみを用いる場合

- A-1) 地表地動振幅と地盤増幅度が互いに独立なとき(ケース1)  
 A-2) 地表地動振幅と地盤増幅度に相関関係があるとき(ケース2)  
 B) 相互相関性を有する地表地動と地盤増幅度の観測値を用いる場合  
 B-1) 地表地動と地盤増幅度の同時観測(ケース3)  
 B-2) 地表地動と地盤増幅度の観測点数が異なるとき(ケース4)  
 C) 地表地動の観測値が得られ、地盤増幅度を見かけ上与える場合(ケース1の特別な場合、ケース5)

本研究の成果をまとめれば以下ようになる。

- 1) ケース4の条件付対数正規確率場における基盤地動の最適推定値・推定誤差分散ならびに地表地動と地盤増幅度の空間分布推定値を解析的に求めた。
- 2) 上記ケース4の理論解は一般解として成立するものであり、ケース1~ケース3、ケース5はその特殊解に相当していることがわかった。
- 3) 観測点では推定誤差が0になり、観測点から遠くなって観測情報の影響が小さくなると、基盤面における最大地動の最適推定値、推定誤差分散が無条件付平均値、無条件分散に近づくことを解析的かつ数値的に確認した。
- 4) 地表面地動と地盤増幅度間の空間相互依存性を考慮することにより、未観測点における推定精度が高まることがわかった。

本論文における数値計算では、地震動指標値、地盤増幅度の空間相関特性ならびに互いに相関性を有する2変量確率場に仮定を導入した。地表地動や地盤増幅度に関して無条件場の平均値や自己・相互共分散を適切に与えることは地震工学上極めて重要なことである。地表地動については経験式(例えば文献9))が知られているが、一方で地盤増幅度の確率的特性に関する評価はこれまで十分に行われていない。よってここでは精度が特に高くないものの、最新のデータを用いて分析した一つの成果<sup>6)</sup>に基づき地盤増幅度をモデル化した。より現実的かつ有用な数値評価に当たってはこのモデル化の精度に留意しなければならない。著者らは提案手法を実観測記録に適用して検証を行うことを考えているため、今後はこの空間相関特性のモデル化に関する研究を進めていく予定である。

謝辞：本研究は文部省科学研究費補助金・特定領域研究(A)(1)「都市直下地震」の計画研究「社会基盤システムの実時間制御技術」(研究代表者・山崎文雄)の研究の一環として実施したものである。ここに関係各位に深甚なる謝意を表す。

## 付録A 確率変数の商の密度関数

2つの確率変数 $x, y$ の商 $z = y/x$ を考えると、 $z$ の確率密度関数は

$$f_Z(z) = \int_{R_x} |x| f_{XY}(x, xz) dx \quad (A.1)$$

で表わせる。ただし、 $f_{XY}(x, y)$ は結合同時確率密度関数、 $R_x$ は $x$ の積分領域である。

以下では、 $z$ が独立な正規確率変数の商、あるいは独立な対数正規確率変数の商で表わせるとき、 $f_Z(z)$ の式をおのおの誘導する。

### (1) 独立な正規確率変数の商

独立な $x, y$ の確率密度関数がおのおの $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ 、 $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ に従うとき、式(A.1)より $f_Z(z)$ としては

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 + \left( \frac{xz - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right\} \right] dx \quad (A.2)$$

が得られる。同式は

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} \left( |x| - \frac{\sigma_y^2\mu_x + \sigma_x^2\mu_y z}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 z^2} \right) \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 + \left( \frac{xz - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right\} \right] dx + \frac{\sigma_y^2\mu_x + \sigma_x^2\mu_y z}{2\pi\sigma_x\sigma_y(\sigma_y^2 + \sigma_x^2 z^2)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 + \left( \frac{xz - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right\} \right] dx \quad (A.3)$$

と同等である。

式(A.3)は同式の指数部が

$$\left( \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 + \left( \frac{xz - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 = \frac{v^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} + \frac{(\mu_y - \mu_x z)^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 z^2} \quad (A.4a)$$

$$\frac{v^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 z^2} = \left( x - \frac{\sigma_y^2 \mu_x + \sigma_x^2 \mu_y z}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 z^2} \right)^2 \quad (A.4b)$$

となることを勘案して求めたものである。その結果式(A.4)を用いると、式(A.3)は

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y(\sigma_y^2 + \sigma_x^2 z^2)} \exp \left\{ -\frac{(\mu_y - \mu_x z)^2}{2(\sigma_y^2 + \sigma_x^2 z^2)} \right\} \cdot \left[ 2 \int_0^{\infty} v \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{v}{\sigma_x \sigma_y} \right)^2 \right\} dv \right. \\ \left. + \frac{\sigma_y^2 \mu_x + \sigma_x^2 \mu_y z}{\sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 z^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{v}{\sigma_x \sigma_y} \right)^2 \right\} dv \right] \quad (A.5)$$

のようになる。

式(A.5)の積分はおおの $\sigma_x^2\sigma_y^2, \sqrt{2\pi}\sigma_x\sigma_y$ になるから、 $z$ の確率密度関数は次のように求められる。

$$f_z(z) = \left\{ \frac{\sigma_y^2\mu_x + \sigma_x^2\mu_y z}{\sqrt{2\pi(\sigma_y^2 + \sigma_x^2 z^2)}} + \frac{\sigma_x\sigma_y}{\pi(\sigma_y^2 + \sigma_x^2 z^2)} \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{(\mu_y - \mu_x z)^2}{2(\sigma_y^2 + \sigma_x^2 z^2)} \right\} \quad (-\infty < z < \infty) \quad (\text{A.6})$$

この式は、独立な2つの正規確率変数の商が正規分布をする確率変数とはならないことを示している。

今、 $x$ が確率変数でなく確定値 $\underline{x}$ となる場合を考えると、 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ は $N(\underline{x}, 0)$ となるので、 $f_x(x) = \delta(x - \underline{x})$ と表わせる。このとき式(A.6)は次のようになり、 $f_z(z)$ は $N(\mu_y/\underline{x}, (\sigma_y/\underline{x})^2)$ に相当することがわかる。

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma_y}{\underline{x}}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \frac{\mu_y}{\underline{x}}}{\frac{\sigma_y}{\underline{x}}} \right)^2 \right\} \quad (\text{A.7})$$

一方、分子の $y$ が確定値 $\underline{y}$ になると、 $\mu_y \rightarrow \underline{y}, \sigma_y^2 \rightarrow 0$ で $f_y(y) \rightarrow \delta(y - \underline{y})$ となるから、 $f_z(z)$ は次式で表わせる。

$$f_z(z) = \frac{\underline{y}}{\sqrt{2\pi\sigma_x z}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{y}{z} - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right\} \quad (\text{A.8})$$

ここで $\underline{y}/z = b$ とおくと、 $|-y/z^2|dz = db$ より、

$$f_z(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{b - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right\} db \quad (\text{A.9})$$

となることがわかる。

## (2) 独立な対数正規確率変数の商

$z$ の確率密度関数は式(A.1)より、

$$f_z(z) = \frac{1}{2\pi\zeta_x\zeta_y} \int_0^\infty \frac{1}{xz} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\ln x - \lambda_x}{\zeta_x} \right)^2 + \left( \frac{\ln xz - \lambda_y}{\zeta_y} \right)^2 \right\} \right] dx \quad (\text{A.10})$$

となる。ここに $\ln x, \ln y$ の平均値を $\lambda_x, \lambda_y$ 、それらの分散を $\zeta_x^2, \zeta_y^2$ としている。

式(A.10)において $\ln x = x'$ とおき、 $x'$ に関する積分操作をすると、 $f_z(z)$ は次のように表わせる<sup>10)</sup>。

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta_z} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln z - \lambda_z}{\zeta_z} \right)^2 \right\} \quad (0 < z < \infty) \quad (\text{A.11})$$

ここに、 $\lambda_z, \zeta_z^2$ は $\ln z$ の平均値、分散であり、次のようになる。

$$\lambda_z = \lambda_y - \lambda_x \quad (\text{A.12a})$$

$$\zeta_z^2 = \zeta_y^2 + \zeta_x^2 \quad (\text{A.12b})$$

上式より、A.(1)で述べた正規分布のときと異なり、 $z$ の確率密度関数は $x, y$ と同一分布の確率変数になって

いることがわかる。このことから独立な対数正規確率変数の商である $z$ の確率変数は対数正規分布に従うので、式(A.6)に比べて式(A.11)を解析的に取扱うことが容易となる。

$z$ の最適推定量は最小誤差分散推定に基づくと、式(A.11)より

$$\begin{aligned} \mu_z &= \int_0^\infty z f_z(z) dz \\ &= \exp \left( \lambda_z + \frac{1}{2} \zeta_z^2 \right) \\ &= \frac{\mu_y}{\mu_x} \exp(\zeta_x^2) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

の平均値となる。ただし $x, y$ の平均値を $\mu_x, \mu_y$ として、次の関係式を用いている。

$$\mu_x = \exp \left( \lambda_x + \frac{1}{2} \zeta_x^2 \right) \quad (\text{A.14a})$$

$$\mu_y = \exp \left( \lambda_y + \frac{1}{2} \zeta_y^2 \right) \quad (\text{A.14b})$$

上式より $y$ が確定値 $\underline{y}$ ならば、 $\mu_z = \underline{y} \exp(\zeta_x^2) / \mu_x$ となる。一方 $x$ が確定値ならば、 $\mu_x = \underline{x}, \zeta_x^2 = 0$ となるので、 $\mu_z = \mu_y / \underline{x}$ のようになる。このように $z$ の最適推定値には商 $y/x$ の分子 $y$ のばらつきが直接関与せず、分母における $\ln x$ の分散 $\zeta_x^2$ が強く影響することが理解できる。

## 付録B 地表地動と地盤増幅度の条件付確率密度関数に必要な諸式

ここでは式(24)における $|C'_{Z_n Z_n}| / |C'_{X_{n-1} X_{n-1}}|$ 、指数部の項の整理に必要な諸式を以下に誘導する。

式(21.d)の $C'_{Z_n Z_n}$ は

$$\begin{aligned} C'_{Z_n Z_n} &= \begin{bmatrix} C'_{X_{n-1} X_{n-1}} & C'_{X_{n-1} z_n} & C'_{X_{n-1} A_n} \\ C'^T_{X_{n-1} z_n} & \zeta_{z_n}^2 & C'_{z_n A_n} \\ C'^T_{X_{n-1} A_n} & C'_{z_n A_n} & C'^T_{A_n A_n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C'_{X_{n-1} X_{n-1}} & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

のように小行列で表わせるので、逆行列の公式を用いて $C'^{-1}_{Z_n Z_n}$ を求めると次のようになる。

$$C'^{-1}_{Z_n Z_n} = \begin{bmatrix} C'^{-1}_{X_{n-1} X_{n-1}} + P_2 Q_2^{-1} P_2^T & -P_2 Q_2^{-1} \\ -Q_2^{-1} P_2^T & Q_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

ここに、 $P_2, Q_2$ は次の通りである。

$$P_2 = C'^{-1}_{X_{n-1} X_{n-1}} \{ C'_{X_{n-1} z_n} C'_{X_{n-1} A_n} \} \quad (\text{B.3a})$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \begin{bmatrix} \zeta_{z_n}^2 & C'_{z_n A_n} \\ C'^T_{z_n A_n} & C'^T_{A_n A_n} \end{bmatrix} - \{ C'_{X_{n-1} z_n} C'_{X_{n-1} A_n} \}^T \\ &\quad \cdot C'^{-1}_{X_{n-1} X_{n-1}} \{ C'_{X_{n-1} z_n} C'_{X_{n-1} A_n} \} \\ &= \begin{bmatrix} 2\zeta_{z_n|c}^2 & 2C'_{z_n A_n|c} \\ 2C'^T_{z_n A_n|c} & 2C'^T_{A_n A_n|c} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.3b})$$

ただし、

$${}_2C'_{x_n|c} = C'_{x_n} - C'^T_{X_{n-1}x_n} C'^{-1}_{X_{n-1}X_{n-1}} C'_{X_{n-1}x_n} \quad (\text{B.4a})$$

$${}_2C'_{x_n A_n|c} = C'_{x_n A_n} - C'^T_{X_{n-1}x_n} C'^{-1}_{X_{n-1}X_{n-1}} C'_{X_{n-1}A_n} \quad (\text{B.4b})$$

$${}_2C'_{A_n A_n|c} = C'_{A_n A_n} - C'^T_{X_{n-1}A_n} C'^{-1}_{X_{n-1}X_{n-1}} C'_{X_{n-1}A_n} \quad (\text{B.4c})$$

式(B.2)を用いると、

$$\begin{aligned} & (Z_{e_n} - \lambda_{Z_n})^T C'^{-1}_{Z_n Z_n} (Z_{e_n} - \lambda_{Z_n}) \\ &= (X_{e_{n-1}} - \lambda_{X_{n-1}})^T (C'^{-1}_{X_{n-1}X_{n-1}} + P_2 Q_2^{-1} P_2^T) \\ & \quad \cdot (X_{e_{n-1}} - \lambda_{X_{n-1}}) - 2(X_{e_{n-1}} - \lambda_{X_{n-1}})^T \\ & \quad \cdot P_2 Q_2^{-1} (F_e - \lambda_F) + (F_e - \lambda_F)^T Q_2^{-1} (F_e - \lambda_F) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

が成り立つので、式(24)の指数部における{ }内は次式のように表わせる。

$$\begin{aligned} & (Z_{e_n} - \lambda_{Z_n})^T C'^{-1}_{Z_n Z_n} (Z_{e_n} - \lambda_{Z_n}) \\ & \quad - (X_{e_{n-1}} - \lambda_{X_{n-1}})^T C'^{-1}_{X_{n-1}X_{n-1}} (X_{e_{n-1}} - \lambda_{X_{n-1}}) \\ &= \{F_e - \lambda_F - P_2^T (X_{e_{n-1}} - \lambda_{X_{n-1}})\}^T Q_2^{-1} \\ & \quad \cdot \{F_e - \lambda_F - P_2^T (X_{e_{n-1}} - \lambda_{X_{n-1}})\} \\ &= \begin{Bmatrix} x_{e_n} - 2\lambda_{x_n|c} \\ A_{e_n} - 2\lambda_{A_n|c} \end{Bmatrix}^T Q_2^{-1} \begin{Bmatrix} x_{e_n} - 2\lambda_{x_n|c} \\ A_{e_n} - 2\lambda_{A_n|c} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

ここに、

$${}_2\lambda_{x_n|c} = \lambda_{x_n} + C'^T_{X_{n-1}x_n} C'^{-1}_{X_{n-1}X_{n-1}} (X_{e_{n-1}} - \lambda_{X_{n-1}}) \quad (\text{B.7a})$$

$${}_2\lambda_{A_n|c} = \lambda_{A_n} + C'^T_{X_{n-1}A_n} C'^{-1}_{X_{n-1}X_{n-1}} (X_{e_{n-1}} - \lambda_{X_{n-1}}) \quad (\text{B.7b})$$

ところで式(B.1)を用いると、行列式 $|C'_{Z_n Z_n}|$ は

$$\begin{aligned} |C'_{Z_n Z_n}| &= \begin{vmatrix} C'_{X_{n-1}X_{n-1}} & B \\ B^T & D \end{vmatrix} \\ &= |C'_{X_{n-1}X_{n-1}}| \begin{vmatrix} I & C'^{-1}_{X_{n-1}X_{n-1}} B \\ B^T & D \end{vmatrix} \\ &= |C'_{X_{n-1}X_{n-1}}| \begin{vmatrix} I & C'^{-1}_{X_{n-1}X_{n-1}} B \\ 0 & D - B^T C'^{-1}_{X_{n-1}X_{n-1}} B \end{vmatrix} \\ &= |C'_{X_{n-1}X_{n-1}}| |D - B^T C'^{-1}_{X_{n-1}X_{n-1}} B| \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

と表わせるので、式(24)の $|C'_{Z_n Z_n}|/|C'_{X_{n-1}X_{n-1}}|$ は式(B.1)、(B.3b)の関係によって行列式 $|Q_2|$ となることがわかる。

#### 参考文献

- 1) The Architectural Institute of Japan: *Earthquake Motion and Ground Conditions*, Maruzen, Tokyo, 1993.
- 2) 高田至郎, 尾崎竜三: 地震動観測記録の補間に基づく兵庫県南部地震の加速度分布特性, 神戸大学工学部建設学科土木系教室兵庫県南部地震学術調査団被災メカニズム解析と復興に関する論文シリーズ, Vol.1-2, Ser.No.2, 1996年11月.
- 3) 濱田 禎, 杉田秀樹, 金子正洋: 公共土木施設における即時震害予測システム, 第10回日本地震工学シンポジウム論文集, Vol.3, pp.3419-3424, 1998年11月.
- 4) 山崎文雄, 大西淳一, 田山 聡, 高野辰雄: 高速道路構造物に対する地震被害推定式の提案, 第10回日本地震工学シンポジウム論文集, Vol.3, pp.3491-3496, 1998年11月.
- 5) 星谷 勝, 野田 茂, 稲田 裕: 観測情報に基づく条件付非正規確率場の推定理論の誘導, 土木学会論文集, No.571/I-40, pp.83-95, 1997年7月.
- 6) 大西淳一, 山崎文雄, 若松加寿江: 気象庁地震記録に基づく地盤増幅度と地形分類との関係, 第10回日本地震工学シンポジウム論文集, Vol.1, pp.909-914, 1998年11月.
- 7) 末富岩雄, 吉田 望, 清水善久, 中山 涉, 山崎文雄, 阿部 進, 鈴木 誠: 横浜市強震記録を用いた地盤増幅度の検討—卓越周期との関係—, 第25回地震工学研究発表会講演論文集, 第1分冊, pp.157-160, 1999年7月.
- 8) 野田 茂, 清野純史, 星谷 勝: 地震動推定のための Simple Kriging 更新法, 土木学会論文集(投稿準備中).
- 9) Molas, G. L. and Yamazaki, F.: Attenuation of earthquake ground motion in Japan including deep focus events, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol.85, No.5, pp.1343-1358, October 1995.
- 10) 亀田弘行, 池淵周一, 春名 攻: 確率・統計解析, 技報堂出版, 1981年11月.

(1999. 3. 15 受付)



# STOCHASTIC INTERPOLATION OF BEDROCK GROUND MOTIONS ESTIMATED FROM RECORDED AMPLITUDES

Shigeru NODA, Hitoshi MORIKAWA and Fumio YAMAZAKI

In this paper, we proposed a method for stochastic interpolation of bedrock ground motion amplitudes conditioned by ground motions at the free surface and/or soil amplification ratios actually observed with a priori information about these properties. The optimal estimate and estimated error variance were derived with respect to various conditions for conditional lognormal fields on the basis of conditional probability density functions for the amplification ratio and ground motion amplitude. Numerical examples were provided for various number of the conditioning sample data and various cases of cross correlation between the amplification ratio and recorded amplitude. The estimated properties were found to be successfully interpolated from the stochastic point of view.