

液状化による地盤の側方変位を受けている 単杭の座屈荷重に及ぼす杭頭境界条件の影響

三浦房紀¹・朱媛媛²

¹正会員 工博 山口大学大学院教授 理工学研究科環境共生工学専攻 (〒755-8611 宇部市常盤台 2-16-1)

²工修 山口大学大学院理工学研究科 博士後期課程 (〒755-8611 宇部市常盤台 2-16-1)

液状化により側方移動を生じた地盤内にある杭は、地盤による強制的な変位と地盤の軟化によって、その安定性が大きく低下することが予想される。そこで筆者らは杭の大変位に伴う幾何学的非線形性を考慮に入れて、杭頭ヒンジの場合を対象にその座屈荷重に関して検討を行ってきた。本論文はその手法を発展させ、杭頭フリーの場合について非線形の微分方程式を導き、その座屈荷重を求めたものである。杭の座屈荷重におよぼす地盤の側方変位の影響、さらに地盤バネの低下が座屈荷重に及ぼす影響を調べた結果、杭頭境界条件の影響は小さいこと、地盤の側方変位は座屈荷重にはほとんど影響を及ぼさないこと、逆に地盤バネの低下は極めて大きな影響を及ぼすこと等が明らかになった。

Key Words : pile, stability analysis, buckling, critical load, nonlinear system

1. はじめに

地震による杭の被害は上部工の慣性力によるものと地盤の変形によるものとに大別されるよう^{1), 2)}。後者の場合の液状化地盤の側方流動などのように特に地盤の変位が大きくなる場合には、杭の大変位に伴う $P-\Delta$ 効果も現れてくる。

現在構造物の設計は限界状態設計へと向っており、杭基礎もその例外ではない^{3), 4)}。このような観点から、筆者らはこの $P-\Delta$ 効果を考慮に入れて、杭の座屈荷重を理論的に求め、地盤の初期変位や地盤バネが座屈荷重に及ぼす影響についてパラメトリックスタディを行った⁵⁾。しかしながら、そこで扱った杭頭の境界条件はヒンジ結合であり、地盤変位と同じだけの初期変位をそこに与えてはいるが、軸荷重の載荷によって杭頭の変位は増加しないという前提条件の下に解析を行っている。初期変位を有する杭に軸荷重が作用すると杭頭変位は増加し、 $P-\Delta$ 効果によって座屈荷重も変化するはずである。そこで、本研究では杭の境界条件を杭先端ヒンジ、杭頭フリーの場合を想定して座屈荷重を求める。前論文と同様にまず支配方程式を導き、その後、実在する杭の諸元を用いて、杭の座屈荷重に与える地盤の側方変位の影響を検討する。さらに液状化による影響を地盤バネの低減で表し、地盤バネの低減の割合が座屈荷重に及ぼす影響も調べる。なお、杭周辺の地盤の影響は分布バネでモデル

化する。本来は地盤バネも材料非線形性を呈するが、本研究では問題を簡単にするために、線形弾性体と仮定している。

2. 支配方程式

支配方程式は基礎方程式と境界条件とに大別される。前者の誘導過程は、前報⁵⁾と同様であるので本報ではその前提条件と結果を簡単に示すにとどめ、後者の境界条件の扱いについて詳しく述べる。

(1) 基礎方程式

液状化現象により、地盤が大きく側方に移動し、杭はその地盤の変位と同じだけの初期変位を生じるものと仮定する。杭の境界条件は杭先端ヒンジ—杭頭フリーの場合を想定する。実際には地盤の側方変位は時間とともに変化するが、ここでは解析中は一定であると仮定する。この様な仮定の下で、杭の初期変位は Fig. 1 に示すように x 方向、 y 方向にそれぞれ $u_0(s)$ 、 $w_0(s)$ で与えられるものとする。ここに s は杭軸に沿った曲線座標である。外力 P による変形が生じる前の初期状態における杭の存在範囲は次式で表される。

$$\Gamma_0 : \{(x, y) | x = s + u_0(s), y = w_0(s), 0 \leq s \leq l\}$$

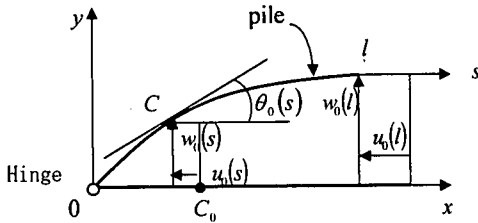


Fig. 1 Initial deformation of a pile and the coordinate systems

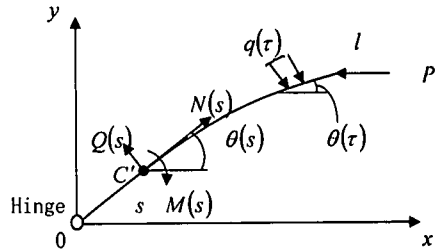


Fig. 2 Notations of pile after deformation due to axial external force P

ここに、 l は杭長である。また図中の $\theta_0(s)$ は任意点 C における杭の接線と x 軸のなす角度である。

以後、誤解を招く恐れがない限り、表記を簡単にするために $u_0(s)$ 、 $w_0(s)$ などを u_0 、 w_0 と表すことにする。

$q(s)$ を単位長さあたりの点 s における地盤からの反力とし、Fig. 2に示すように杭頭 $s=l$ で外力 P が x 軸に平行に作用するものとする。この外力が作用することによって杭の任意の点 $C(s+u_0, w_0)$ は $C'(s+u_0+u, w_0+w)$ へと移動する。ここに、 u 、 w は外力 P による x 、 y 方向の変位である。このときの杭の変形後の存在範囲は次式で与えられる。

$$\Gamma: \{(x, y) | x = s + u_0 + u, y = w_0 + w, 0 \leq s \leq l\}$$

図中の $\theta(s)$ は点 C' における杭の接線と x 軸のなす角である。

地盤からの反力 $q(s)$ は一般に行われるように杭の変位に地盤バネを掛けて求められるものとする。また、 $q(s)$ は杭に対して直角に作用するものとする。ただし、ここでは地盤の変位は外力 P の作用による変位、すなわち点 $C \rightarrow$ 点 C' への変位を対象とする。換言すれば地盤の初期変位、点 $C_0 \rightarrow$ 点 C による地盤反力への寄与はないものと仮定している。この様な仮定の下では地盤反力 $q(s)$ は次式で与えられる (Fig. 3 参照)。

$$q(s) = k \{u(s) \sin \theta(s) + w(s) \cos \theta(s)\} \quad (1)$$

ここに、地盤バネ k は地盤反力係数 k_H に杭径 D を掛けて求められる。

初期応力の影響を考慮して、つり合い方程式、構成関係を用いて、解くべき非線形の基礎方程式は次式で与えられる⁵⁾。

$$\begin{cases} u' = \cos \theta - \cos \theta_0 \\ w' = \sin \theta - \sin \theta_0 \\ EI \theta''' + P \cos \theta \theta' + k \{u \sin \theta + w \cos \theta\} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

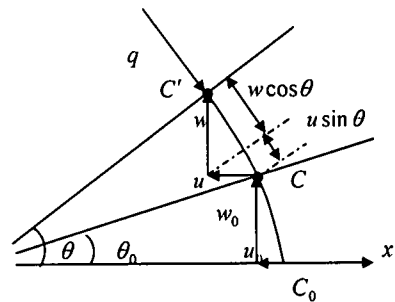


Fig. 3 The reaction of soil: q

ここに、 EI は曲げ剛性であり、 $(\quad)'$ は s 軸に関する微分を意味する。

(2) 境界条件

杭の境界条件は杭先端ヒンジ—杭頭フリーの場合を考える。すなわち、前報⁵⁾では杭頭はヒンジで、回転は許すものの P による w はないものとしたが、ここでは P によって w が生じるものとする。

杭先端、すなわち $s=0$ では、変位および曲げモーメントがゼロであるから、杭先端における境界条件は次式で与えられる。

$$u(0) = w(0) = 0, \theta'(0) = \theta_0'(0) = 0 \quad (3a)$$

また、杭頭、すなわち $s=l$ で、曲げモーメントがゼロであるから、杭頭における一つの境界条件は次式で与えられる。

$$M(l) = EI \theta''(l) = 0 \quad (3b)$$

杭頭のもう一つの境界条件は以下に述べるせん断力 $Q(l)$ に関する境界条件である。

点 C' における杭軸直角方向の力のつり合い方程式は次式で与えられる (Fig. 2 参照)。

$$Q(s) + P \sin \theta(s) - \int_0^s q(\tau) \cos(\theta(s) - \theta(\tau)) d\tau = 0$$

ここに、 $Q(s)$ は点 C' における杭のせん断力である。

$s=l$ なる条件を上式に入れると積分範囲はゼロとなり、積分項=0となるので、 $Q(l) + P \sin \theta(l) = 0$ となる。杭の構成方程式は $Q = EI\theta''$ であるから、杭頭のもう一つの境界条件は次式で与えられる。

$$EI\theta''(l) + P \sin \theta(l) = 0 \quad (3c)$$

以上より式(2)と式(3)が解くべき非線形の境界値問題である。

ここで、次式で与えられる無次元量を考える。

$$\begin{cases} t = \frac{s}{l}, & W = \frac{w}{l}, & U = \frac{u}{l}, & W_0 = \frac{w_0}{l} \\ \lambda = \frac{Pl^2}{EI}, & \alpha = \frac{kl^4}{EI} \end{cases} \quad (4)$$

式(4)を式(2)と式(3)に代入することによって、次式で与えられる無次元表示の非線形境界値問題を得る。

$$\begin{cases} U' = \cos \theta - \cos \theta_0 \\ W' = \sin \theta - \sin \theta_0 \\ \theta'' + \lambda \cos \theta \theta' + \alpha \{U \sin \theta + W \cos \theta\} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} U(0) = 0, W(0) = 0, \theta'(0) = 0 \\ \theta'(l) = 0 \\ \theta''(l) + \lambda \sin \theta(l) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 P による変形は小さいものと考えられる、すなわち $w(s)$ 、 $u(s)$ 、 $\theta(s) - \theta_0(s)$ は小さいものと考え、式(5)より $u' = \cos \theta - \cos \theta_0 \rightarrow 0$ 、また $w' = \sin \theta - \sin \theta_0 \rightarrow \theta - \theta_0$ ので、解くべき境界値問題は次式で表わされる。なお、杭頭の境界条件を表わす結果だけ異なるが、他は前報の結果と同じであるので、この式の誘導過程は前報を参照されたい。

$$W^{(4)} + \lambda W'' + \alpha \cos \theta_0 W = -\lambda W_0'' - \theta_0'' \quad (7)$$

$$W(0) = 0, W''(0) = 0 \quad (8a)$$

$$W''(l) = 0, W'''(l) = -\lambda(W'(l) + \theta_0(l)) \quad (8b)$$

ちなみに、前報の杭頭の変位が与えられている地盤の変位と同じ場合の土端条件は(8b)の代わりに次式となる。

$$W(l) = 0, W''(l) = 0$$

さて、式(8b)は右辺に非同次項 $\theta_0(l)$ を含むので、境界条件は非同次となる。そこで、境界値問題(7)、(8)を

解くために杭の境界条件を同次になるように変換を行う。具体的には、 $W''(l) = -\lambda\theta_0(l)$ を満足する W_1 を以下のように導入する。すなわち、

$$W_1(t) = -\frac{\lambda\theta_0(l)}{12}t^4 + \frac{\lambda\theta_0(l)}{6}t^3 \quad (9)$$

さらに次の変換を行う W_2 を導入する。

$$W_2(t) = W(t) - W_1(t) \quad (10)$$

式(9)、式(10)を式(7)、式(8)に代入することによって、以下のように $W_2(t)$ で表示される同次の境界値問題を得る。

$$W_2^{(4)} + \lambda W_2'' + \alpha_0 W_2 = F \quad (11)$$

$$W_2(0) = 0, W_2''(0) = 0 \quad (12a)$$

$$W_2''(l) = 0, W_2'''(l) = -\lambda W_2'(l) \quad (12b)$$

ここに、 $\alpha_0 = \alpha \cos \theta_0$ である。また、

$$F = -\lambda W_0'' - \theta_0'' + 2\lambda\theta_0(l) - \lambda^2\theta_0(l)^2 + \lambda^2\theta_0(l)^3 - \frac{\alpha_0\lambda\theta_0(l)}{6}t^3 + \frac{\alpha_0\lambda\theta_0(l)}{12}t^4$$

である。

境界値問題(7)、(8)と境界値問題(11)、(12)は等価問題である。すなわち、式(10)によって、杭の無次元解は $W(t) = W_1(t) + W_2(t)$ で与えられる。

3. 座屈荷重

ここでは、式(11)、式(12)で与えられる杭の等価境界値問題を解くことによって得られる固有値、およびそれから求める座屈荷重について考察を行う。ここで考察を行う座屈荷重は杭が初期変位を有しているという点で、他の研究者^{(6), (7), (8), (9)}の扱ったものとは異なる点に注意を要する。

(1) 初期角度 θ_0 が一定値である場合

$\alpha_0 = \alpha \cos \theta_0$ を一定値とおくと、式(11)の特性方程式は $\mu^4 + \lambda\mu^2 + \alpha_0 = 0$ となり、その解として $\mu^2 = \left(-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\alpha_0}\right)/2$ を得る。ここに、解が存在するための条件は $\lambda^2 > 4\alpha_0$ である。そこで、 $\xi_1 = \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\alpha_0}\right)/2$ と $\xi_2 = \left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\alpha_0}\right)/2$ ($\xi_1 > 0, \xi_2 > 0, \xi_1 \neq \xi_2$)とおくと、式(11)の微分方程式の一般解は、積分定数を C_1, C_2, C_3, C_4 とすると、次式で与えられる。

$$W_2(t) = C_1 \cos \sqrt{\xi_1} t + C_2 \cos \sqrt{\xi_2} t + C_3 \sin \sqrt{\xi_1} t + C_4 \sin \sqrt{\xi_2} t \quad (13)$$

式(13)を式(12)の杭先端の境界条件に代入すれば、 $C_1 = C_2 = 0$ を得る。また、式(13)を式(12)の杭頭の境界条件に代入すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} C_3 \sqrt{\xi_2} \cos \sqrt{\xi_1} + C_4 \sqrt{\xi_1} \cos \sqrt{\xi_2} &= 0 \\ C_3 \xi_1 \sin \sqrt{\xi_1} + C_4 \xi_2 \sin \sqrt{\xi_2} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

同次線形方程式(14)が非零解(C_3, C_4)があるためには、方程式(14)の係数行列式がゼロでなければならない。このことから次の関係が得られる。

$$\xi_1^{\frac{3}{2}} \tan \sqrt{\xi_1} = \xi_2^{\frac{3}{2}} \tan \sqrt{\xi_2} \quad (15)$$

この方程式(15)の解は無数個存在する。したがって、 $\xi_1 = (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\alpha_0})/2$ 、 $\xi_2 = (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\alpha_0})/2$ と式(15)から、求まる固有値 λ は次式で与えられる。

$$\lambda_m = \xi_m + \frac{\alpha_0}{\xi_m} \quad (m=1, 2, \dots) \quad (i=1 \text{ or } 2) \quad (16)$$

ここに、 ξ_m は式(15)を満足する解であり、 $\xi_{11} \leq \xi_{12} \leq \xi_{21} \leq \dots \leq \xi_{2m}$ とおく。 m は次数である。 λ_m の右辺第2項が初期変位、地盤バネ、杭の曲げ剛性、杭長の影響を表す項である。

こうして求まった固有値 λ_m に対して、

$$\lambda_{cr} = \min \{ \lambda_m \} = \lambda_m \quad (17)$$

すなわち、最小の λ_m を λ_{cr} とし、そのときの m を m^* とする。以下においては、この λ_{cr} を無次元座屈荷重と呼ぶことにする。

こうして求まった λ_{cr} と式(4)から座屈荷重 P_{cr} は次式で与えられる。

$$P_{cr} = \frac{EI}{l^2} \lambda_{cr} \quad (18)$$

以上の議論より明らかなように、 λ_{cr} は m^* の関数である。また m^* は α_0 に依存する。したがって、以下においては、 m^* と α_0 の関係について検討を行い、どのように λ_{cr} が定まるかについて考察する。

式(16)を関数 f を用いて、

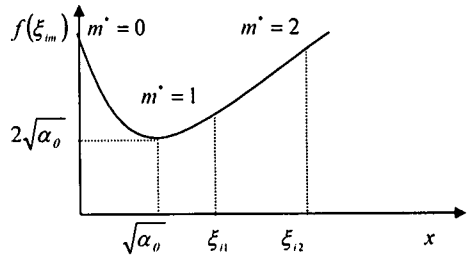


Fig. 4 Minimum value of $f(x)$ and $f(\xi_m)$

$$f(x) = x + \frac{\alpha_0}{x}$$

とおき、 f を最小にする点を求める。 f を独立変数 x について描くとFig. 4のようになり、その最小値 $2\sqrt{\alpha_0}$ は $x = \sqrt{\alpha_0}$ のときとなる。ここでの目的は、 $f(\xi_m) = \lambda_m$ を最小にする整数値 m^* を定めることである。しかしながら、 α_0 は一定値であるから、一般的には、 $\xi_m = \sqrt{\alpha_0}$ を満足する整数値 m^* は存在しない。したがって、 α_0 の値によって以下のように場合分けを行い、その範囲で最小となる m^* を決める必要がある。また、 $\lambda_{cr} \geq 2\sqrt{\alpha_0}$ が得られる。

a) $0 \leq \xi_{1m^*} \leq \xi_{11}$ のとき

この式を満足するのは明らかに $m^* = 1$ のときである。

b) $\xi_{11} \leq \xi_{1m^*} \leq \xi_{12}$ のとき

この式を満足する m^* は1あるいは2である。 $m^* = 1$ および $m^* = 2$ のときの f はそれぞれ $f(\xi_{11}) = \xi_{11} + \frac{\alpha_0}{\xi_{11}}$ 、

$$f(\xi_{12}) = \xi_{12} + \frac{\alpha_0}{\xi_{12}}$$

ここで $f(\xi_{11}) \leq f(\xi_{12})$ 、すなわち、 $m^* = 1$ のときの条件を求める。

$$f(\xi_{12}) - f(\xi_{11}) = \xi_{12} + \frac{\alpha_0}{\xi_{12}} - \xi_{11} - \frac{\alpha_0}{\xi_{11}} \geq 0$$

より、 $\alpha_0 \leq \xi_{11} \xi_{12}$ を得る。すなわち

$$\xi_{11}^2 \leq \alpha_0 \leq \xi_{11} \xi_{12}$$

のとき、 $m^* = 1$ となる。

逆に、 $f(\xi_{11}) \geq f(\xi_{12})$ より、

$$\xi_{11} \xi_{12} \leq \alpha_0 \leq \xi_{12}^2$$

のとき $m^* = 2$ となる。

c) $\xi_{12} \leq \xi_{1m^*} \leq \xi_{11}$ のとき

この式を満足する m^* は 2 あるいは 3 である。b) の場合と同様に $m^* = 2$ あるいは $m^* = 3$ の条件を求めると次のようになる。

$$\xi_{i2}^2 \leq \alpha_0 \leq \xi_{i2}\xi_{i3} \text{ のとき, } m^* = 2$$

$$\xi_{i2}\xi_{i3} \leq \alpha_0 \leq \xi_{i3}^2 \text{ のとき, } m^* = 3$$

以下同様に一般的に次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \alpha_0 \leq \xi_{i1}\xi_{i2} \text{ のとき, } m^*(\alpha_0) &= 1 \\ \xi_{i(m-1)}\xi_{im} \leq \alpha_0 \leq \xi_{im}\xi_{i(m+1)}, \quad m \geq 2 \text{ のとき} \\ m^*(\alpha_0) &= m \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、式(19)に $\alpha_0 = \frac{kI^4}{EI} \cos \theta_0$ を代入すると、次の関係が得られる。

$$l^4 \leq \frac{\xi_{i1}\xi_{i2}EI}{k \cos \theta_0} \text{ のとき, } m^*(l) = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{\xi_{i(m-1)}\xi_{im}EI}{k \cos \theta_0} \leq l^4 \leq \frac{\xi_{im}\xi_{i(m+1)}EI}{k \cos \theta_0}, \quad m \geq 2 \text{ のとき,} \\ m^*(l) = m \end{aligned} \quad (20)$$

$l \rightarrow \infty$ とき、 $m^* \rightarrow \infty$ となるので、式(20)より

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{l^4}{\xi_{im}^2} = \frac{EI}{k \cos \theta_0} \quad (21)$$

なる関係が成り立つ。

一方、座屈荷重 P_{cr} に関しては、

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} P_{cr}(l) &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{EI}{l^2} \lambda_{cr} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{EI}{l^2} \left(\xi_{im^*} + \frac{\alpha_0}{\xi_{im^*}} \right) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left(EI \frac{\xi_{im^*}}{l^2} + \frac{k \cos \theta_0 l^2}{\xi_{im^*}} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

となり、これに式(21)の関係を代入すると次式を得る。

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P_{cr}(l) = 2\sqrt{Elk \cos \theta_0} \quad (23)$$

この式は l がある程度大きくなると、 P_{cr} は一定値 $2\sqrt{Elk \cos \theta_0}$ に収束することを意味する。

この式において、周辺に地盤がない、すなわち $k = 0$ とすると、 $\lim_{l \rightarrow \infty} P_{cr}(l) = 0$ となる。

これらのことより、杭周辺地盤の存在が杭の座屈荷重

に大きな影響を及ぼすことがわかる。

(2) 初期角度 θ_0 が l の関数である場合

この場合には式(11)、式(12)で与えられる境界値問題を解析的に解くのは困難であるから、以下のように数値計算によって解く。

まず式(11)、式(12)で与えられる境界値問題を射撃法によって¹⁰⁾初期値問題に変換すると次式を得る。

$$\begin{cases} W_2^{(4)} + \lambda W_2'' + \alpha_0 W_2 = F \\ W_2(0) = W_2''(0) = 0 \\ W_2'(0) = a_1, W_2'''(0) = a_2 \end{cases} \quad (24)$$

ここに、 a_1, a_2 は初期値である。

次に、式(24)を解くためにこれと等価な特殊解 W_{2p} および一般解 u_1, u_2 に関する次の 3 組の初期値問題に式(24)を置き換える。すなわち、

$$\begin{cases} W_{2p}^{(4)} + \lambda W_{2p}'' + \alpha_0 W_{2p} = F \\ W_{2p}(0) = W_{2p}'(0) = W_{2p}''(0) = W_{2p}'''(0) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} u_1^{(4)} + \lambda u_1'' + \alpha_0 u_1 = 0 \\ u_1(0) = 0, u_1'(0) = 1, u_1''(0) = u_1'''(0) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} u_2^{(4)} + \lambda u_2'' + \alpha_0 u_2 = 0 \\ u_2(0) = u_2'(0) = u_2''(0) = 0, u_2'''(0) = 1 \end{cases} \quad (27)$$

これらの式を Rung-Kutta 法により数値的に解く¹⁰⁾。求める解 $W_2(t; \lambda)$ は得られた解 W_{2p}, u_1, u_2 を用いて、次式で与えられる。

$$W_2(t; \lambda) = W_{2p}(t; \lambda) + a_1 u_1(t; \lambda) + a_2 u_2(t; \lambda) \quad (28)$$

ここで、 a_1, a_2 は未知の初期値であるので、まずこれを決定する必要がある。そこで、境界条件(12b)を満足させるために、式(28)を式(12b)に代入する。この結果 a_1, a_2 に関する連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} a_1 u_1''(l; \lambda) + a_2 u_2''(l; \lambda) = -W_{2p}''(l; \lambda) \\ a_1 (u_1'''(l; \lambda) + \lambda u_1'(l; \lambda)) + a_2 (u_2'''(l; \lambda) + \lambda u_2'(l; \lambda)) \\ = -(W_{2p}'''(l; \lambda) + \lambda W_{2p}'(l; \lambda)) \end{cases} \quad (29)$$

この連立方程式を解くことによって a_1, a_2 が求まる。ただし、その際係数行列 $\neq 0$ であることが必要である。一方、係数行列 = 0 より固有値 λ が求まる。すなわち、

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} u_1''(1; \lambda) & u_2''(1; \lambda) \\ (u_1''(1; \lambda) + \lambda u_1'(1; \lambda)) & (u_2''(1; \lambda) + \lambda u_2'(1; \lambda)) \end{vmatrix} = 0 \quad (30)$$

これを解くことによって得られる λ_m のうち最小のものが無次元座屈荷重 λ_{cr} である。なお、この行列式は二分法によって解く¹⁰⁾。こうして、 λ_{cr} が決まると、そのときの W_{2p} 、 u_1 、 u_2 が決まり、これらを用いて式(28)より固有関数 W_2 が決まる。

4. 解析例

解析例として、ここでは小口径の2種類の杭、杭径400mmのPHC杭(Prestressed High Strength Concrete Pile)と杭径177.8mmのマイクロパイル¹¹⁾の物性値を用いて座屈荷重に関する検討を行った。杭の諸元をTable 1にまとめて示す。

地盤バネ k は道路橋示方書³⁾に基づいて算出した。すなわち、

$$k = k_H D \quad (31)$$

$$k_H = k_{H0} \left(\frac{B_H}{30} \right)^{-1/4}$$

ここに、 k_{H0} は直径30cmの剛体円板による平板載荷試験の値に相当する水平方向地盤反力係数(kgf/cm³)で、 B_H は荷重作用方向に直交する基礎の換算載荷幅(cm)である。

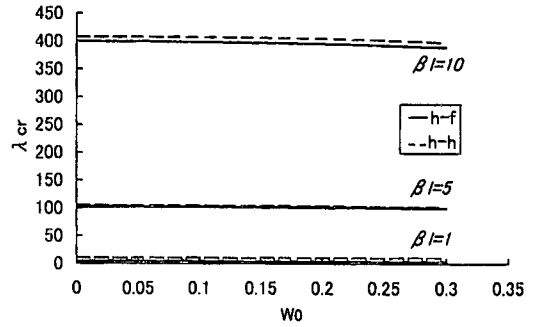
$$\begin{cases} B_H = \sqrt{D/\beta} \\ k_{H0} = \frac{1}{30} E_D \end{cases} \quad (32)$$

ここに、 $\beta = \sqrt{\frac{k_H D}{4EI}}$ は基礎の特性値(cm⁻¹)で、 E_D は地盤の動的変形係数(kgf/cm²)である。また

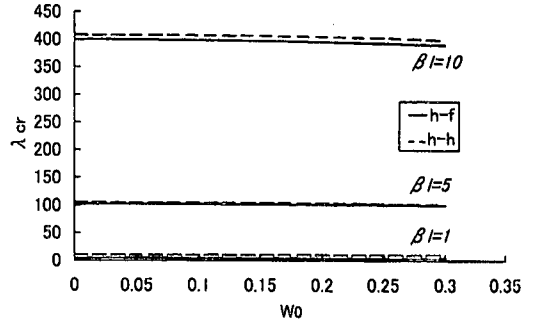
$$\begin{cases} E_D = 2(1 + \nu_D) G_D \\ \nu_D = 0.5, \quad G_D = \frac{\gamma_i}{10g} V_{Si}^2 \\ \gamma_i = 1.7, \quad V_{Si} = c_i V_{Si} \\ c_i = 0.8, \quad V_{Si} = 80 N_i^{1/4} \end{cases} \quad (33)$$

ここに、

ν_D : 地盤の動的ポアソン比
 G_D : 地盤の動的せん断変形係数(kgf/cm²)
 γ_i : 地盤の単位体積重量(tf/cm³)



(a) case 1



(b) case 2

Fig. 5 The relationship between W_0 and λ_{cr}

Table 1 Parameters of analyzed pile

External Diameter D(mm)	Internal Diameter d(mm)	Flexural Rigidity EI(tf·m ³)
177.8	152.5	473
400	270	3983

g : 重力加速度 (m/s²)

V_{Si} : 地盤のせん断弾性波速度 (m/s)

V_{Sni} : 地盤バネの算出に用いる*i*番目の地層の平均せん断弾性波速度 (m/s)

C_i : 地盤ひずみの大きさに基づく補正係数

V_{Si} : *i*番目の地層の平均せん断弾性波速度 (m/s)

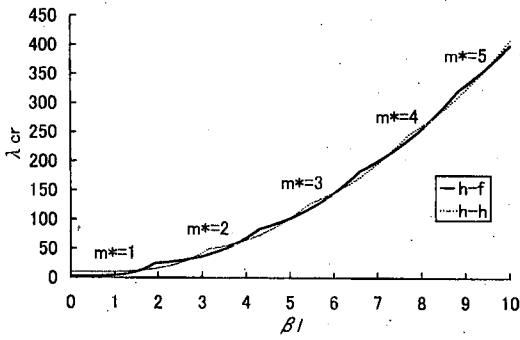
N_i : 標準貫入試験による*i*番目の地層の平均N値

地盤の側方変位分布として杭先端の位置で0、杭頭の位置で w_0 となるように以下の二つCaseを仮定した。

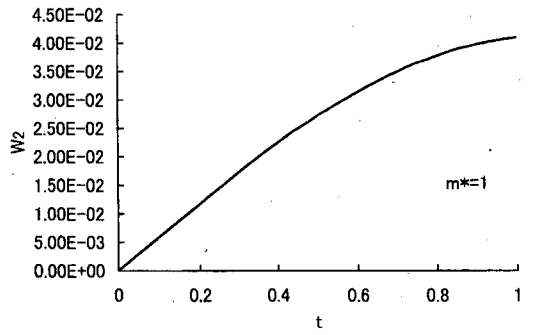
Case 1: $W_0 = W_{01} t$, $\theta_0 = W_{01}$,

Case 2: $W_0 = W_{01} \sin \frac{\pi}{2} t - \frac{W_{01}}{4} \pi \cos \frac{\pi}{2} t$,

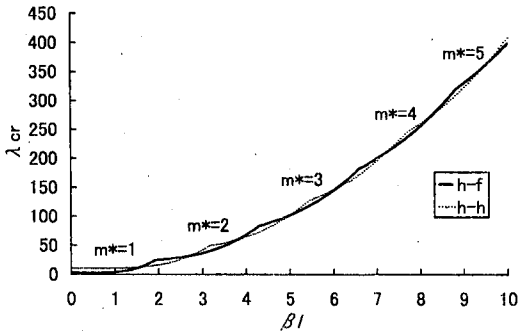
$\theta_0 = \frac{\pi}{4} W_{01} \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{\pi^2}{8} W_{01} t \sin \frac{\pi}{2} t$.



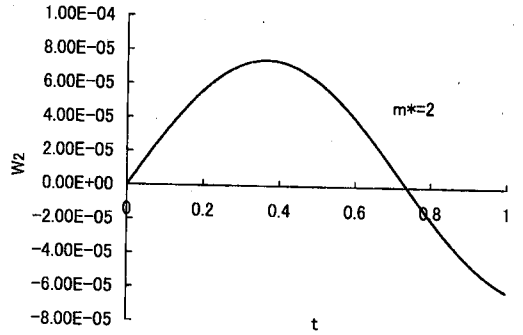
(a) case 1



(a) m*=1



(b) case 2



(b) m*=2

Fig. 6 The relationship between βl and λ_{cr}

Case 1 は三角形分布を仮定するものである。

Case 2 は三角関数分布を仮定するものである。

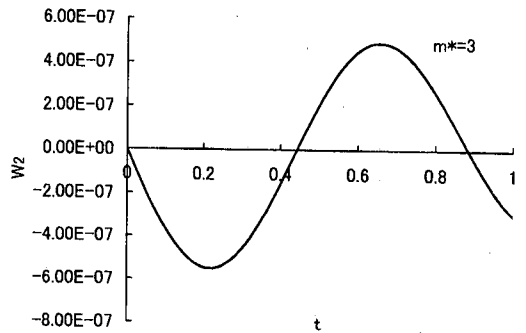
Case 1 も Case 2 も杭の初期状態における境界条件を満足している。

(1) 無次元パラメータでの検討

以上の議論より明らかなように、無次元座屈荷重 $\lambda_{cr} = \lambda_{cr}(\alpha, \theta_0) = \lambda_{cr}(\beta l, \theta_0)$ である。ここに、 βl は杭の無次元長さである。以下においては、 λ_{cr} と θ_0 、 βl の関係について検討を行う。

Fig. 5(a), (b) それぞれに Case1 と Case2 における無次元座屈荷重 λ_{cr} を無次元初期変位 W_{01} の関数として示す。杭頭がフリーの場合は実線(h-f)で示してあり、同時には杭頭がヒンジの場合も破線(h-h)で示してある。

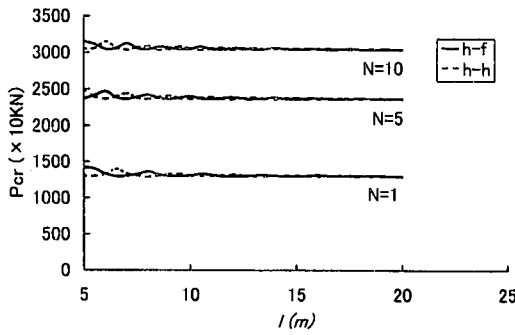
この図より、無次元座屈荷重 λ_{cr} は βl に対しては大きく変化するが、無次元初期変位 W_{01} に対してはあまり変化しないことがわかる。また杭頭フリー(実線)とヒンジ(破線)を比較すると、杭頭フリーの方が λ_{cr} は小さくなっているが、その差はほんのわずかである。さらに、図(a), (b)を比較すると、Case1 と Case2 の差はあまりない。



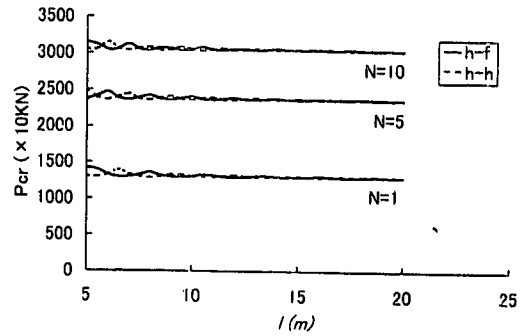
(c) m*=3

Fig. 7 The model for different ξ_{m^*}

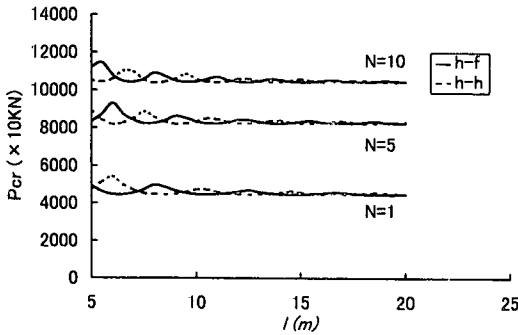
そこで、Fig. 6 に λ_{cr} におよぼす βl の影響を示す。この結果は、 $W_{01} = 0.1$ に対するものである。前章の議論から分かるように、座屈荷重は杭の長さに依存し、杭の長さ座屈時の杭の変形を規定する整数 m^* との間には式(20)の関係がある。従って λ_{cr} は整数 m^* の関数となり、その形は m^* に依存して折れ曲がった曲線となる。 βl が小さいときには $m^* = 1$ であるが、 βl が大きく



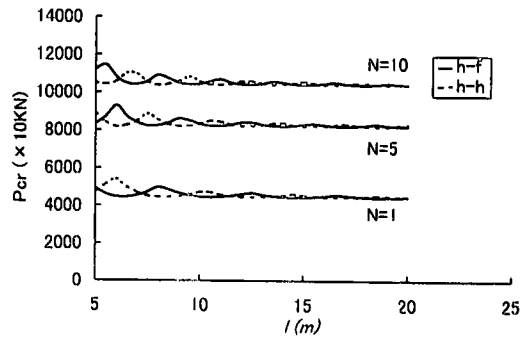
(a) D=177.8mm, case 1



(b) D=177.8mm, case 2



(c) D=400mm, case 1



(d) D=400mm, case 2

Fig. 8 The relationship between P_{cr} and l for different N-Value

なると m^* も大きくなる。なお、図には、杭頭ヒンジの場合の結果も破線で示してある。図中の m^* の数字は杭頭フリー(実線)の場合に対するものである。これより、杭頭フリーの方が βl の増大に対して、 m^* が早く大きくなるのがわかる。

なお、Fig. 5 と Fig. 6 より、Case1 と Case2 の差はあまりないので、ここで仮定した初期変位の形は無次元座屈荷重 λ_{cr} にあまり影響がないことが明らかである。

Case1 の場合の $\lambda = \lambda_{cr}$ 時、すなわち、座屈時の無次元変位 W_2 を Fig. 7 に示す。座屈時の杭の無次元変位 W_2 は整数 m^* の関数であるから、Fig. 7 には $m^* = 1, 2, 3$ に対する W_2 の分布を示した。

ここで、式(19)より m^* と杭の無次元長さ βl との関係は、 $m^* = 1$ のとき、 $\beta l = 1$ 、 $m^* = 2$ のとき、 $\beta l = 3$ 、 $m^* = 3$ のとき、 $\beta l = 5$ である。

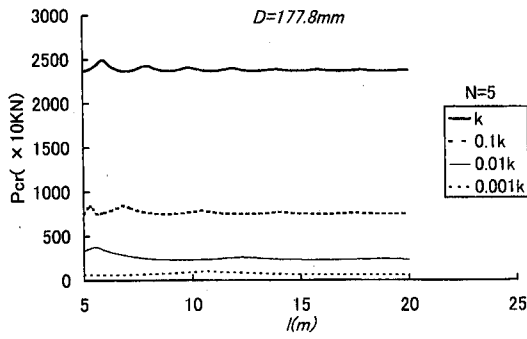
(2) 実在する杭での検討

Table 1 に示した杭の実際の値を入れて座屈荷重 P_{cr} を求め、N 値をパラメータにとり杭長の関数としてまとめた結果を Fig. 8 の実線で示す。この図は無次元初期変

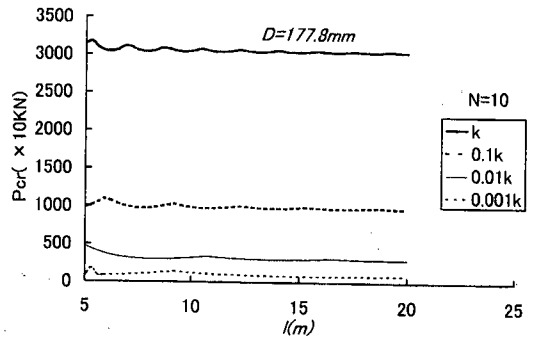
位 $W_0 = 0.1$ に対する結果である。この結果より座屈荷重は N 値に大きく依存することが分かる。また、杭の長さが 15m くらいまでは座屈荷重は杭長に対して変化しているが、15m 以上になるとほとんど変化しなくなることが分かる。すなわち座屈荷重は杭の長さではなく周辺の地盤の拘束で決まってしまうことをこの結果は意味している。図中には杭頭ヒンジの場合の結果も破線で示してあるが、杭長 5m 程度までは杭頭の境界条件による差が見られるが、それより長くなると両者の差はほとんどなくなる。

Fig. 8(a), (b) の比較より、Case1 と Case2 の差はあまりないので、初期変位の形は座屈荷重 P_{cr} にあまり影響がないことが明らかである。

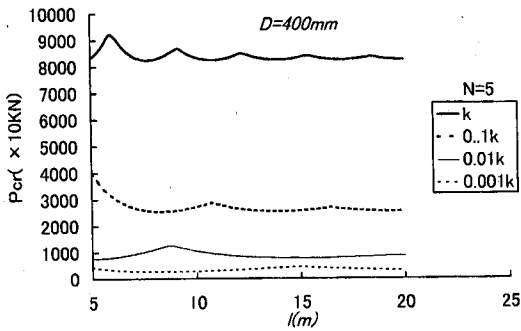
最後に、座屈荷重 P_{cr} に及ぼす地盤バネの低下の影響を調べた。これは液状化による地盤の剛性低下の影響を擬似的に表わしたものである。液状化による地盤バネの低下による研究はこれまでも多く行われており、数十分の 1 から数千分の 1 の範囲という結果が報告^{(12)~(14)}されている。そこで、ここでは地盤バネを 10 分の 1 から 1000 分の 1 まで低下させて解析を行った。その結果を Fig. 9 に示す。この図から明らかなように、地盤バネの低下は座屈荷重を著しく低下させることが分かる。当然



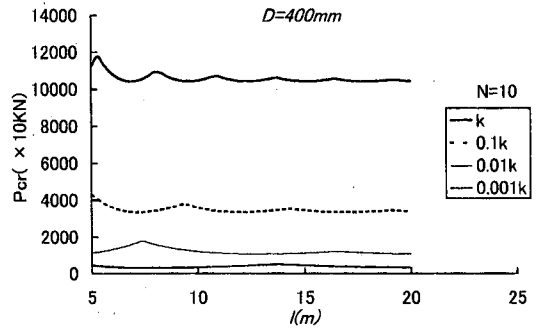
(a) $D=177.8\text{mm}$, $N=5$



(b) $D=177.8\text{mm}$, $N=10$



(c) $D=400\text{mm}$, $N=5$



(d) $D=400\text{mm}$, $N=10$

Fig. 9 The effect of spring reduction on the P_{cr}

のことが、地盤バネの低下が大きくなれば地盤のない場合、すなわちオイラーの座屈荷重に近づき、杭長の影響が現れてくる。なおこのことはFig. 9からも予想される結果である。

5. 結論

本研究は側方変位を有する地盤内の杭頭が自由である杭の座屈荷重を理論的に求め、それに及ぼす地盤の拘束や杭長の影響をパラメトリックに調べたものである。筆者らは、前論文で杭頭ヒンジの場合について同様の考察を行っているので、本論文では、その結果との比較という観点からも考察を行った。その結果、以下の知見が得られた。

- (1) 地盤の側方変位が大きいほど座屈荷重は小さくなるが、その影響は非常に小さい。
- (2) 地盤の拘束の影響により、杭が長くなると座屈荷重は杭頭の境界条件に関係なくある一定値に収束する。その値は次式で与えられる。

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P_{cr}(l) = 2\sqrt{Elk \cos \theta_0}$$

- (3) 地盤の剛性の座屈荷重に及ぼす影響は非常に大きい。N値が小さくなると座屈荷重は小さくなる。特に液化化などによって地盤バネが低下すると座屈荷重は急激に低下する。

- (4) 以上の結果は前論文で扱った杭頭ヒンジの場合と同様である。杭頭ヒンジと杭頭フリーという境界条件が座屈荷重に及ぼす影響は、杭長の短いとき(本研究で扱った小口径の杭では5mくらいまで)に現われるが、それ以上長くなると、周辺地盤の拘束の影響によりほとんど現れなくなる。

本論文は上述したように、液化化などによって地盤が側方に移動した場合の座屈荷重に及ぼす杭頭境界条件の影響を地盤を線形弾性体と仮定して検討したものである。ここでは杭の幾何学的な非線形性は考慮に入れてあるが、杭や地盤の材料非線形性は考慮されていない。現在、杭と地盤の材料非線形性を考慮に入れた場合に関する検討を行っている。これらの結果については稿を改めて報告する予定である。

参考文献

- 1) 宮坂享明: 高靱性耐震ジョイント杭の開発とその液状化地盤の側方移動に対する応答特性に関する研究, 山口大学博士論文, 1997. 3.
- 2) 泉博允: 高靱性耐震ジョイント杭基礎の地震時動的応答特性に関する研究, 山口大学博士論文, 1999. 3.
- 3) (社)日本道路協会: 道路橋示方書・同解説, V耐震設計編, 1996. 12.
- 4) (財)鉄道総合技術研究所: 鉄道構造物等設計標準・同解説, 耐震設計(案), 1998. 11.
- 5) 三浦房紀, 朱媛媛: 地盤の側方変位を受けている単杭の座屈荷重に関する基礎的研究, 土木学会論文集, Vol. 681/I-56, pp. - , 2001. 7.
- 6) Mandel, J.: Flambement au Sein d' un Milieu Elastique, *Annales des Ponts et Chaussees*, pp. 295-335, 1936.
- 7) Bjerrum, L.: Norwegian Experiences with Steel Piles to Rock, *Geotechnique*, Vol. 7, No.2, pp. 73-96, 1957.
- 8) Gouvenot, D.: Essais de Chargement et de Flambement de Pieux Aiguilles, *Annales de l' Institut Technique du Batiment et des travaux Publics, Comite Francais de la Mecanique des Soils et des Fondations*, No. 334, 1975.
- 9) Fleming, W. G. K., Weltman, A. J., Randolph, M. F. and Elson, W. K.: *Piling Engineering. 2nd Edition*. New York Surrey University Press, John Wiley and Sons, 1992.
- 10) 広中平祐: 現代数理科学事典, 大阪書籍株式会社, 1991.
- 11) Miura, F.: State of the Art of Micropiles, *Proc. of the Second International Workshop on Micropiles*, pp. 3-11, 1999.
- 12) 安田進, 斎藤公正, 鈴木信久: 埋設管に対する液状化地盤の拘束力, 第19回地震工学研究発表会講演概要, pp. 189-192, 1997.
- 13) 北浦勝, 宮島昌克: 液状化地盤—埋設管系の復元力特性の評価, 第19回地震工学研究発表会講演概要, pp. 525-528, 1997.
- 14) 高田至郎: 側方流動中の液状化地盤のバネ係数, 文部省科学研究補助金研究成果報告書, No. 61302055, 1988.

(2000. 8. 4 受付)

THE EFFECT OF BOUNDARY CONDITION AT PILE HEAD OF A PILE ON THE CRITICAL LOAD SUBJECTED TO LATERAL GROUND DISPLACEMENT

Fusanori MIURA and Yuan-yuan ZHU

In this paper, we first set up a mathematical model of a single pile subjected to axial load with initial horizontal displacement in elastic soil, of which pile head is free; then obtained critical loads and expressed them in nondimensional parameters. Based on the results obtained from the parametric study, we found that the critical load decreased with the increment of the initial displacement, but the effect of it was very small. On the contrary, the effect of the reduction of soil spring coefficient due to liquefaction on the decrease of the critical load was significant. Finally, the effect of the difference of the boundary condition at the pile head, i.e, free vs hinge, could be seen for short piles, but the effect could not be seen for long piles.