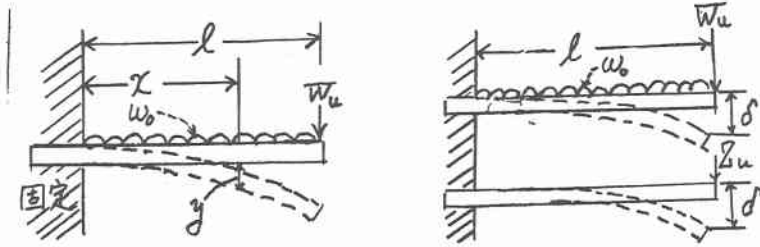


I-39

道路橋示方書V耐震設計編固有周期 $T = 2.0 1\sqrt{\delta}$ とする
示方の δ が含む復元力要素, 非復元力要素の解析

ロック建設技術研究所 正会員 今井 芳雄



§ 1. 等分布荷重 w_0 と先端に集中荷重 Wu をうけるcantileverのたわみ曲線。

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = M x (E I)^{-1} = \{Wu \cdot l - Wu \cdot x + w_0 (x^2 - 2 l x + l^2) \times 2^{-1}\} (E I)^{-1}$$

$$\frac{d y}{d x} = \int \left(\frac{d^2 y}{d x^2} \right) d x = \{Wu \cdot l \int d x - Wu \int x d x + W_0 l^2 \times 2^{-1} \int d x\} (E I)^{-1}$$

$$= \{Wu \cdot l \cdot x - Wu \times 2^{-1} x^2 + w_0 \times 2^{-1} \times 3^{-1} x^3 - w_0 l \times 2^{-1} x^2 + w_0 l^2 \times 2^{-1} x + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5\} (E I)^{-1}$$

$$\left(\frac{d y}{d x} \right)_{x=0} = \{0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5\} (E I)^{-1} = 0, E I \neq 0$$

∴積分定数 $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = 0$

$$y = \int \frac{d y}{d x} d x = \{Wu \cdot l \int x d x - Wu \times 2^{-1} \int x^2 d x + w_0 \times 6^{-1} \int x^3 d x - w_0 l \times 2^{-1} \int x^2 d x + w_0 l^2 \times 2^{-1} \int x d x\} (E I)^{-1}$$

$$= \{Wu \cdot l \times 2^{-1} x^2 - Wu \times 2^{-1} \times 3^{-1} x^3 + w_0 \times 6^{-1} \times 4^{-1} x^4 - w_0 l \times 2^{-1} \times 2^{-1} x^3 + C_6 + C_7 + C_8 + C_9 + C_{10}\} (E I)^{-1}$$

$$(y)_{x=0} = 0 \quad \therefore \text{積分定数 } C_6 + C_7 + C_8 + C_9 + C_{10}$$

$$\therefore y = \{Wu \cdot l \times 2^{-1} x^2 - Wu \times 6^{-1} \times 4^{-1} x^4 - w_0 l \times 6^{-1} x^3 + w_0 l^2 \times 2^{-1} \times 2^{-1} x^2\} (E I)^{-1}$$

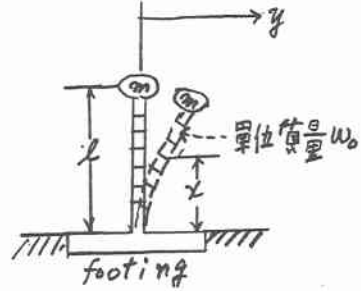
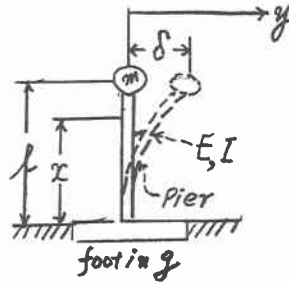
$$(y)_{x=l} = \{Wu \cdot l \times 2^{-1} l^2 - Wu \times 6^{-1} l^3 + w_0 l \times 6^{-1} l^3 + w_0 l^2 \times 2^{-1} l^2\} (E I)^{-1}$$

$$= \{Wu \cdot l^3 \times 3^{-1} + w_0 l^4 (2 \cdot 4^{-1} - 6^{-1} + 4^{-1})\} (E I)^{-1}$$

$$= \{Wu \cdot l^3 \times 3^{-1} + w_0 l \times l^3 \times 8^{-1}\} (E I)^{-1}$$

たわみ曲線式は $\left(\frac{d y}{d x} \right)_{x=0} = 0, (y)_{x=0} = 0$ の2条件のもとに成り立っている。

Analysis of factor for strain and nonstrain forces containing in δ of period equation $T = 2.0 1\sqrt{\delta}$ under road bridge guid book explaining method against earthquake in part V.
by Yosio Imai



§ 2. 固有振動の微分方程式

固定された footing に固定された長さ l の pier の上にある 1 個の質量 m の自由振動を考える。pier は自身の質量なく弾性係数 E ($\text{kg} \cdot \text{cm}^{-2}$) と moment of inertia I を有している。pier の頂上 m のあるところに水平力 Wu を加え、 δ だけ変位して静止釣り合ったとする。すでにみちびいた式 $(y)_{x=1} \dots = \{Wu \cdot l^3 \times 3^{-1} + w_0 \cdot l \times l^3 \times 8^{-1}\} (EI)^{-1}$ の等分荷重

$w_0 = 0$ とおいた式 $\delta = (y)_{x=1} = Wu \cdot l^3 \times 3^{-1} \times (EI)^{-1}$ が得られる。

このとき、 $Wu (\delta)^{-1} = k$ とおく。この k は弾性定数 (Spring Constant) である。

$$\delta = (y)_{x=1} = Wu \cdot l^3 \times 3^{-1} \times (EI)^{-1} \text{ であるから、} k = Wu (\delta)^{-1} = Wu \{Wu \cdot l^3 \times 3^{-1} (EI)^{-1}\}^{-1} = l^{-3} \cdot 3 EI$$

これをみると加える水平力は Wu と限らず、その時の変位を知らればやはり $k = l^{-3} \cdot 3 EI$ をうる。

この時、質量 m に関係なく k が求められた。質量 m がのった状態から δ を解き放せば自由振動がおこる。

pier のばねのちからで振動は永続する。 $m = Wu \cdot g^{-1}$ 。 $g = \text{gravity}$ 加速度

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0 \text{ の微分方程式の解が振動の周期 (period) を与える。}$$

定数を A 、時間を t 、 $w = \text{radian} \cdot \text{sec}^{-1}$ として 1 つの持解を $y = A \sin w t$ とすれば

$$\frac{dy}{dt} = A w \cos w t \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = A \cdot w^2 (-) \sin w t \text{ これを代入すると } m \{A w^2 (-) \sin w t\}$$

$$+ k A \sin w t = 0$$

$$\therefore (A \sin w t) (-m w^2 + k) = 0 \quad \therefore -m w^2 + k = 0 \quad \therefore w^2 = k \cdot m^{-1}$$

$$\text{他の特解を } y = B \cos w t \text{ とおくと } \frac{dy}{dt} = B (-) w \sin w t, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = B (-) w^2 \sin w t$$

$$\text{これを代入して } m \{B w^2 (-) \cos w t\} + k \cos w t = 0$$

$$\therefore (B \cos w t) (-m w^2 + k) = 0 \quad \therefore -w^2 + k = 0 \quad \therefore w^2 = k \cdot m^{-1}$$

定数 A 、 B を初期条件で求める前に $w^2 = k \cdot m^{-1}$ の解が得られた $\sin w t$ 、 $\cos w t$ は、 $w t = 2\pi$ 毎に繰り返すから 2π とおいた時の周期 T であり、 $T = 2\pi \cdot w^{-1}$ が得られる。

$$\text{質量 } m \text{ が上部構造の重量 } Wu \times g^{-1} \text{ (} g = \text{gravity の加速度) であるせば、} T = 2\pi \cdot w^{-1} = 2\pi \{(k m^{-1})^{\frac{1}{2}}\}^{-1} = 2\pi \{Wu \cdot \delta^{-1} (Wu \cdot g^{-1})^{-1}\}^{\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot g^{-\frac{1}{2}} \delta^{\frac{1}{2}} = 2.01 \delta$$

$$(g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}, \delta = \text{meter})$$

即ち、 $T = 2.01 \delta$ は $(\frac{dy}{dx})_{x=0} = 0$ 、 $(y)_{x=0} = 0$ という条件の時、pier の頂部に水平力

Wu を作用させた時の式であって、別途上部構造の重量 Wu を質量になおさなくてもすむと云うだけで

ある $k \cdot y$ はちからであり、このちからに等しいちからが $m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$ である。1 個の最終 k が対応して

いる通路橋方書 V 耐震設計編 (3. 3. 1) 式はまさしくこの条件の時のみ成立する式である。

(解 3. 3. 1) 式の様に剛体としての構造物の傾き δ_0 、 θ_0 、 k_0 は異質のものである。

§ 3. 上部構造の重量と pier の全重量の同時振動

地震水平加速度は footing から、どの高さの点にも同一の地震の加速度を質量に与えるその力を W_u , w_0 とみなした時の pier のたわみ曲線式は、 χ を footing からはかって

$$y = \{W_u \cdot \ell \times 2^{-1} \chi^2 - W_u \times 6^{-1} \chi^3 + w_0 \times 6^{-1} \times 4^{-1} \chi^4 - w_0 \ell^2 \times 2^{-1} \times 2^{-1} \chi^2\} (EI)^{-1}$$

となる。 w_0 は等分布荷重だからどの χ 点でも w_0 だが、変位は y で χ 毎に変わって同一でない。

従って、振動の微分方程式のために 1 つの弾性常数 (Spring Constant) にまとめ切れない。

$(y)_{\chi=0} \dots = \{W_u \cdot \ell^3 \times 3^{-1} + w_0 \ell \times \ell^3 \times 8^{-1}\} (EI)^{-1}$ これは cantilever 先端の沈下量で pier 頭部の水平変位でもある各 w_0 ごとの弾性常数をある 1 つのものに表せない $\chi = 0$ の先端に Z_u 1 個の場合の沈下量 (pier の水平変位でもある) を Δ とおいて、

$$\Delta = Z_u \cdot \ell^3 (3EI)^{-1} \text{ とおいて } \Delta = (y)_{\chi=0} \text{ とおけば、}$$

$$Z_u \cdot \ell^3 (3EI)^{-1} = \{W_u \ell^3 \times 3^{-1} + w_0 \ell \times \ell^3 \times 8^{-1}\} (EI)^{-1} \text{ になる。}$$

$$\therefore Z_u = \{W_u \ell^3 \times 3^{-1} + w_0 \ell \times \ell^3 \times 8^{-1}\} (EI)^{-1} \times \{\ell^3 (3EI)^{-1}\}^{-1} \\ = \{W_u \times 3^{-1} + w_0 \ell \times 8^{-1}\} (EI^{-1}) \}^{-1} = \ell^{-3} (3EI)$$

即ち、 $m \frac{d^2 y}{dt^2} + k \cdot y = 0$ の微分方程式で近似させうと考える。

$w = \text{radian (sec)}^{-1}$ である時、この微分方程式の一般解に必要な 2 個の定数 A , B を定める前に $w^2 = k \times m^{-1}$ が得られるから

$$w^2 = k \times m^{-1} = \ell^{-3} (3EI) \{ \{ (W_u \times 3^{-1} + w_0 \ell \times 8^{-1}) \times 3 \} \times g^{-1} \}^{-1} \\ = \ell^{-3} \{ (E_u \times 3^{-1} + w_0 \ell \times 8^{-1}) \}^{-1} \times g \times EI$$

ただし、 $g = \text{gravity}$ の加速度 $9.8 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$

$$w T = 2\pi \text{ この時の } t = T \text{ とおく。 } T = \text{固有振動周期 } T = 2\pi \times w^{-1}$$

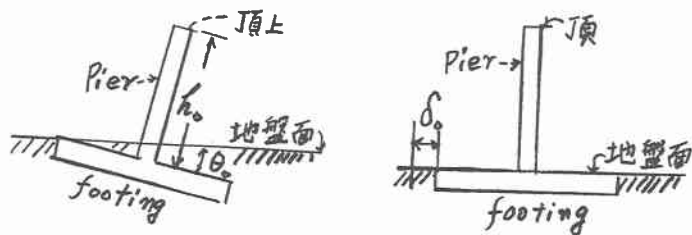
§ 4. 計算例

$\ell = 11 \text{ m}$, $EI = 10^7 \times 3.79 \text{ (ton) (meter)}^2$, $W_u = 424 \text{ ton}$ (上部構造の重量)

$w_0 \ell = 189 \text{ ton}$, $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$ の数値の時、

$$w^2 = k \cdot m^{-1} = \ell^{-3} EI (W_u \times 3^{-1} + w_0 \ell \times 8^{-1})^{-1} \times g \\ = 10^{-3} \times 1.33^{-1} \times 10^7 \times 3.79 \times (141.3 + 23.6)^{-1} \times 9.8 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2} \\ = 10^2 \times 16.93$$

$$\therefore w = (10^2 \times 16.93)^{\frac{1}{2}} = 41.1 \quad WT = 2\pi \quad \therefore T = 2\pi (41.1)^{-1} = 0.153 \text{ sec}$$



§ 5. pier, footing が夫々剛体で全構造体が剛体扱い

道路橋示方書V耐震設計編P. 22図-解3. 3. 6耐震設計上の地盤面における荷重と変位(解3. 3. 5)式における δ_0 は footing の水平変位、 θ_0 は footing の回転角と定義されているこの算式の $H_0=Wu+0.8(Wp+Wf)$ 、 $M_0=Wu \cdot h_0+0.8Wp(hp \times 2^{-1}+hf)+0.8Wfhf \times 2^{-1}$

これによって pier 頂部の変位は δ_0 と O_0h_0 の和(解3. 3. 1)と求めているが振動の微分方程式

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0 \text{ からみて } m \frac{d^2 y}{dt^2} \text{ は常に } Wu \text{ に等しいわけでもない } k \cdot y \text{ の } y \text{ も } \delta_0 \text{ や } \theta_0 h_0$$

と固定したものでもない。 $\frac{d^2 y}{dx^2} = Mx(EI)^{-1}$ における先端のちからが $m \frac{d^2 y}{dt^2}$ である時の y である。

§ 6. 結言

固有振動は質量 m にはたらく $m \frac{dy}{dt^2}$ のちからとばねの復元力 $k \times y$ が equal になり乍らの運動

である。 footing と pier が剛体として水平変位、回転変位している姿でない。

$T=2.01\sqrt{\delta}$ はたまたま上部構造の重量 Wu を水平力として得られる弾性常数は任意のちからから求まる弾性常数に等しいからあらためて W_u の質量 $=Wu \times g^{-1}$ を使わなくてすむという単なる便宜手段であるにすぎない。なんでも変位さえ求まれば δ に含めて成立するとするは早計である。1991年版計算例によれば $T=0.4 \text{ sec}$ であって、 0.153 sec とは相当な差力が出ている。

根号内に入れる δ は、 $m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0$ の微分方程式の解を満す振動の時にのみ適用される可きである