

住友金属工業(株) 正会員○西山貴大
 京都大学防災研究所 正会員 高山知司

1. はじめに

振動外力によって石油タンク等の液面変動が大きくなると、油があふれ出したり、浮屋根の衝突で火災原因となることがある。このとき、地震動によるタンク振動を考えると、液面振動には水平振動だけでなく、鉛直振動も影響すると考えられる。そこで本研究では、タンク内の液面振動に与える鉛直振動の影響を理論的に検討し、液面振動には、鉛直振動も大きく影響することを数値計算によって明らかにした。

2. 矩形タンクに発生する液面振動の運動理論

図-1のように、タンクと共に動く移動座標系を考え、線形化した運動方程式、連続式、境界条件および初期条件から、次式のような微分方程式が導かれる。

$$P_n''(t) + \frac{n\pi}{l_x} \tanh \frac{n\pi h}{l_x} \{g + f_v''(t)\} P_n(t) = -\frac{2\{1 - (-1)^n\}}{n\pi} f_H''(t) \tanh \frac{n\pi h}{l_x} \quad (1)$$

この式を $P_n'(t \leq 0) = 0, P_n(t \leq 0) = 0$ の初期条件で解く。このとき液面の変動量は

$$\zeta = -\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cos \frac{n\pi x}{l_x} \quad (2)$$

と表される。ここで、 l_x はタンクの長さ、 h は液面高さ、 $f_H''(t)$ は水平方向の加速度、 $f_v''(t)$ は鉛直方向の加速度である。

3. 円筒タンクに発生する液面振動の運動理論

円筒タンクのときも矩形タンクと同様な式から、以下のような微分方程式および液面の変動量を表す式を得る。

$$R_{1n}''(t) + \{g + f_v''(t)\} k_{1n} R_{1n}(t) \tanh k_{1n} h = -f_H''(t) I_n \tanh k_{1n} h \quad (3)$$

$$\zeta = \sum_n R_{1n}(t) J_1(k_{1n} r) \cos \theta \quad (4)$$

ここで、 $I_n = 2k_{1n} r_0 \int_0^{r_0} [(k_{1n} r_0)^2 - 1] J_1(k_{1n} r_0) r dr$ 、 r_0 はタンクの半径、 k_{1n} は $J_1'(k_{1n} r_0) = 0$ を満たす n 番目の値である。

4. 微分方程式の理論解

外力を $f_v''(t) = -\alpha_v \gamma^2 \sin \gamma t$ 、 $f_H''(t) = -b_H \Omega^2 \sin \Omega t$ とし、微分方程式を

$$q''(t) + \omega^2 \{1 - \varepsilon \sin \gamma t\} q(t) = E \sin \Omega t \quad (5)$$

とする。ここで、 $\omega = \sqrt{\alpha_n g}$ 、 $\varepsilon = \alpha_v \gamma^2 / g$ 、 $E = \beta_n b_H \Omega^2$ である。このとき

$$q(t) = S(t) + U \sin \Omega t \quad (6)$$

とおくと、式(5)は

$$S''(t) + \omega^2 S(t) = \varepsilon \omega^2 \{S(t) + U \sin \Omega t\} \sin \gamma t \quad (7)$$

と書き換えられ、式(7)を理論的に解くと次式に示す解が得られる。ここで、 $U = E / (\omega^2 - \Omega^2)$ である。

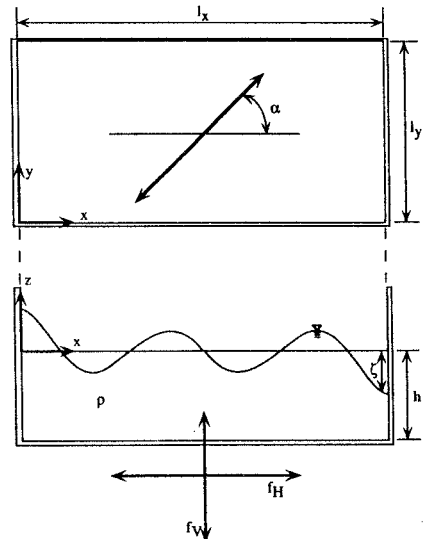


図-1 矩形タンクの座標系

$$\begin{aligned}
S(t) = & \eta_0 \sin \phi + \varepsilon \omega^2 \left[\frac{\eta_0}{2\gamma(2\omega + \gamma)} \cos(\phi + \gamma) + \frac{\eta_0}{2\gamma(2\omega - \gamma)} \cos(\phi - \gamma) - \frac{U \cos(\gamma + \Omega)t}{2\{\omega^2 - (\gamma + \Omega)^2\}} + \frac{U \cos(\gamma - \Omega)t}{2\{\omega^2 - (\gamma - \Omega)^2\}} \right] \\
& + \varepsilon^2 \omega^4 \left[-\frac{\eta_0 \sin(\phi + 2\gamma)}{16\gamma^2(2\omega + \gamma)(\omega + \gamma)} - \frac{\eta_0 \sin(\phi - 2\gamma)}{16\gamma^2(2\omega - \gamma)(\omega - \gamma)} - \frac{U \sin(\Omega + 2\gamma)t}{4\{\omega^2 - (\gamma + \Omega)^2\}\{\omega^2 - (2\gamma + \Omega)^2\}} \right. \\
& \left. + \frac{U}{4(\omega^2 - \Omega^2)} \left\{ \frac{1}{\omega^2 - (\gamma + \Omega)^2} + \frac{1}{\omega^2 - (\gamma - \Omega)^2} \right\} \sin \Omega - \frac{U \sin(\Omega - 2\gamma)t}{4\{\omega^2 - (\gamma - \Omega)^2\}\{\omega^2 - (2\gamma - \Omega)^2\}} \right] \quad (8)
\end{aligned}$$

この式において、 $\gamma = 2\omega$ 、 $\gamma = \omega$ 、 $\omega = \gamma + \Omega$ 、 $\omega = 2\gamma + \Omega$ 、 $\omega = |\gamma - \Omega|$ および $\omega = |2\gamma - \Omega|$ のとき $S(t)$ が無限大に近づくことから、これらは共振を起こす条件だと考えられる。したがって、これらの条件を満たす場合の液面変動について、数値計算を行った。

5. 結果

図-2は、矩形タンクにおいて水平振動が 0.5 Hz で、 $\gamma = 2\omega$ を満たす鉛直振動を与えたときのタンクの壁での液面変動を描いたものである。鉛直方向の周波数は、四角で囲んで示している。この図から、液面の変動は時間の経過にしたがって指数関数的に大きくなり、初めは水平振動の影響により変動するが、時間が経過し、共振によって液面変動が大きくなると、鉛直振動の影響が大きくなり、固有周期で振動するようになるということがわかる。また、 $\gamma = 2\omega$ 以外の条件のときは、ほとんど共振は見られなかった。

図-3は、円筒タンクにおいて水平振動が 0.5 Hz で、 $\gamma = 2\omega$ を満たす鉛直振動を与えたときのタンクの壁での液面変動を描いたものである。この図から円筒タンクにおいても、矩形タンクと同様な結果が得られていることがわかる。

参考文献

Takayama, T., 'Theory of Transient Fluid Waves in a Vibrated Strage Tank', Report of The Port and Harbour Research Institute, Vol 15, No.2, 1976.

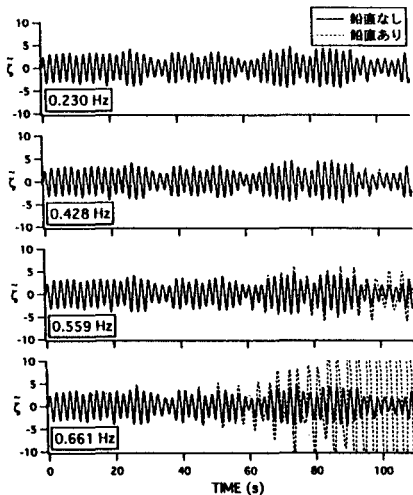


図-2 矩形タンクにおける $\gamma = 2\omega$ のときの液面変動 (水平 0.5 Hz)

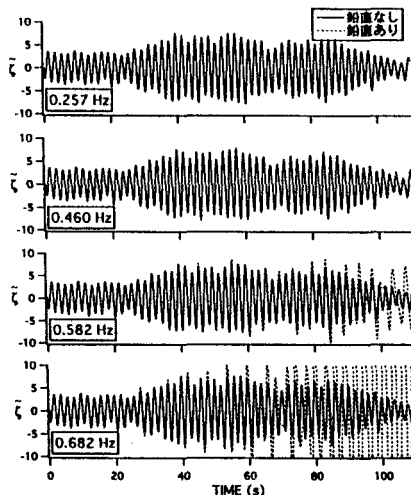


図-3 円筒タンクにおける $\gamma = 2\omega$ のときの液面変動 (水平 0.5 Hz)