

地表地震断層発生のシミュレーションのための確率有限要素法の開発

DEVELOPMENT OF STOCHASTIC FINITE ELEMENT METHOD
FOR SIMULATION OF SURFACE EARTHQUAKE FAULT

マチェイ・アンドレ* 堀宗朗**

Maciej ANDERS and Muneo HORI

*学生会員 修士 東京大学大学院 社会基盤工学専攻 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

**正会員 Ph.D. 東京大学地震研究所 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

In order to simulate the formation process of surface earthquake faults, we develop a new stochastic finite element method for an elasto-plastic body with randomly varying material properties. The method is based on the Karhunen-Loeve and the polynomial chaos expansions to efficiently estimate complete probabilistic characteristics of responses, such as average, variance, and a probability density function. The method is compared with the Monte-Carlo simulation, and the agreement is satisfactory. Also, it is shown that the proposed stochastic finite element method is able to simulate complicated bifurcation phenomena associated with the fault formation process.

Key Words : surface fault formation, stochastic finite element method, random media, bifurcation, stability

1. はじめに

1999年に起きた二つの地震(トルココジャエリ地震¹⁾, 台湾集集地震²⁾)では, 地表地震断層が付近の構造物に与える脅威が露見された. 強震動という動的な揺れとは別に, 断層が引き起こす大きな変位に対して何らかの対策を講じることは検討を要する. この検討に必要なデータとして, 対象とする地点において「地表地震断層が発生するか否か」, 発生する場合は「どこにどの程度のずれが生じるか」を推定することが望まれる. 地表断層は, 震源断層から基盤までに達した変位のずれが地表に現れたものである. 震源断層の破壊過程を推定することは難しいものの, 震源断層で起こりうるずれ変位の大きさをプレートテクトニクスから予測することは決して不可能ではない. したがって, 基盤にずれ変位を与えた時に, 地表地震断層の発生の有無やずれ変位の位置・規模を推定することが必要となる.

地表地震断層の挙動を予測する手法の一つに数値シミュレーションがある. しかし, 信頼できる挙動予測を行うためには, 二つの大きな問題がある.

1. 断層発生・進展のメカニズム: 地震を引き起こす震源断層の滑りや破壊はある程度研究されているものの, 基盤のずれから進展する地表地震断層の発生に関しては, そのメカニズムが必ずしも解明されていない. 断層のずれが地盤内で散逸する場合があること, 地表に現れても雁行状等の特有のパターンが形成されること等, 現象自体が複雑である.

2. 地盤の構造や材料特性の不確かさ: 数値計算の問題として, 基盤にプレート運動から推定されるずれ量を与えた時に地盤内を進展する地表地震断層をシミュレートすることは, 決して不可能ではない. しかし, シミュレーションの結果を現実に近づけるためには, 地盤の正確なモデル化が不可欠である. 構造や材料特性の測定には限界があり, このようなモデル化は難しい.

著者のグループ⁸⁾は, ねじりせん断試験を利用したゼラチン盤のモデル実験によって, 雁行状地表地震断層発生のメカニズムを検討し, 雁行状断層の発生には「選択的分岐」が支配的メカニズムであることを報告している. これは, 基盤のずれによって一様に発生した断層が地表面に向かって進展する際に, 特定の断層のみが規則的に進展を続け, 地表に周期的な亀裂を作る, というものである. また, 構造や材料特性の不確かさを確率的に扱うことで, 地盤を確率的な不均一体としてモデル化することを試みている. このモデルの平均的な挙動を推定する理論⁷⁾を構築し, 地表地震断層の数値シミュレートが可能であることを提案している.

以上の結果をふまえて, 本論文は新しい確率有限要素法³⁾による地表地震断層のシミュレーションを紹介する. シミュレーションでは, 地盤を弾塑性体, 断層を塑性変形が集中したせん断帯としてモデル化する. 確率有限要素法^{5), 6)}の特徴は, 不均一体の不確かさに応じて確率的に変動する変位等の応答を表す関数に対して, 確率空間と物理空間での二つの関数展開を施すことである. 関数展開によって, 確率的に支配的とな

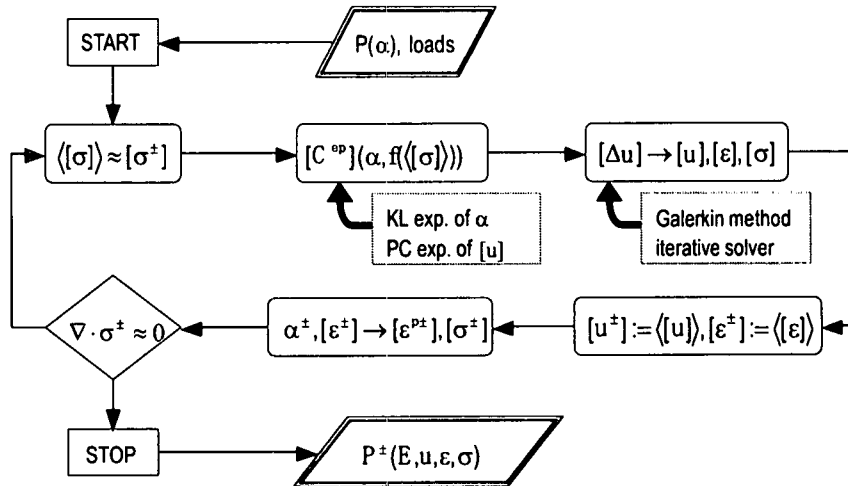


図-1 確率有限要素法のフローチャート

る応答を見つけることが可能となる。この結果、非線形解析に関わる特殊な工夫をすることなく、また、モンテカルロシミュレーションに比べ遙かに効率的に応答の確率特性(平均・分散・確率密度関数等)を求めることができる。

本論文は以下のように構成される。最初に関数展開を利用した確率有限要素法の定式化の概略を示す。二つの関数展開はやや抽象的であるため、簡単な例を示してその本質を示すことにする。次に地表地震断層問題の理想化されたモデルに対し、数値計算結果を示す。二次元と三次元においてモンテカルロシミュレーションとの比較により、確率有限要素法の妥当性を検討する。なお、本論文ではシンボリック表示とマトリクス表示を併用する。たとえば応力は σ ないし $[\sigma]$ として表示される。また確率の平均は $\langle \cdot \rangle$ 、偏微分は記号 ∇ を用いて表す。

2. 定式化

地盤を材料特性が確率的に変動する弾塑性体としてモデル化し、このモデルを解析する確率有限要素法を示す。手順は、1) 簡単な弾性挙動のみを扱い確率の取り扱いを定式化、2) 増分形式での弾塑性挙動の定式化、3) 有限要素法に組み込むための離散化の定式化、である。

2.1 確率関数の展開

地盤の弾性特性が確率的に変動する場合、弾性応答も確率的に変動する。弾性特性や弾性応答を場所と確率に依存する確率関数として考えると、このような確率関数は場所の関数と確率の関数の積の和として表すことが可能である。これが本論文の根幹となる KL(Karhunen-Loeve) 展開と PC(Polynomial Chaos) 展開^{5),6),9)} である。最初に KL 展開を説明する。弾性係数 E の平均 $\langle E \rangle$ からの変動 $\alpha = E - \langle E \rangle$ を取り上げると、これは次の

ように KL 展開される。

$$\alpha(x, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_m} \phi_m(x) \xi_m(\omega) \quad (1)$$

ここで x は場所、 ω は一つの事象¹を表す。また、1) ϕ_m は α の共分散マトリクスの固有関数、2) ξ_m は ϕ_m に対応した確率空間での固有関数、3) λ_m は両者に対応した展開係数である(詳細は参考文献参照)。式(1)から明らかなように、連続的な関数 α が既知の関数 $\{\phi_m\}$ と $\{\xi_m\}$ によって離散的に表すことができる。

式(1)に現れた確率変数の関数 ξ_m は確率空間での基底とはならない。しかし、この関数の多項式から確率空間の基底を作ることができる。これが PC 展開である。例えば変位 u は次のように展開される。

$$u(x, \omega) = \mu_0 \Gamma_0 + \sum_{n_1=1}^{\infty} \mu_{n_1} \Gamma_1(\xi_{n_1}) + \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \mu_{n_1, n_2} \Gamma_2(\xi_{n_1}, \xi_{n_2}) + \dots \quad (2)$$

ここで $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots\}$ は関数 $\exp(-\frac{1}{2}x^2)$ を x に関して展開して得られる多項式であり、PC と呼ばれる。また μ_{n_1} は展開係数である。具体的には $\Gamma_0 = 0$ 、 $\Gamma_1(\xi) = \xi$ である。通常、 ξ_m は正規分布に対応した関数となるが、この Γ_n は非正規分布に対応した関数も表すことができる。

2.2 確率的弾塑性体への適用

関数展開という性質上、KL 展開と PC 展開は線形問題には有効であるが、材料特性が確率的に変動する非線形弾塑性体に直接適用することは難しい。そこで増

¹ 例えば V を N 個の領域に分割し、各領域の E が M 個の値をとる場合、 ω は M^N 個の事象の一つである。この確率を $p(\omega)$ とする。

分形式による線形化と同様に、材料特性のばらつきが小さい場合、平均的挙動で応答のばらつきを摂動展開し、得られた増分問題を確率空間でも線形化することをはかる。具体的な対象は、変位増分 du の支配方程式である。

$$\nabla \cdot (c^{ep}(\omega) : (\nabla \otimes du)) = 0 \quad (3)$$

ここで c^{ep} は弾塑性係数であり、材料特性の確率的な変動はこのみに現れる。

関連流動則を仮定すると、 c^{ep} は応力の関数である降伏関数 f によって決定される。材料特性自体が確率的に変動する他に、応答である応力自体も確率的に変動するため、降伏関数を確率的に厳密に取り扱うことは難しい。そこで次のような摂動展開を施す。

$$f(\sigma(x, \omega)) \approx f(\langle \sigma \rangle(x)) + \dots \quad (4)$$

材料特性のばらつきが無くなる極限では第二項以降は0に収束する。したがってこの項を無視する近似を行う。

応力の平均 $\langle \sigma \rangle$ を求めるには、応力の確率特性を事前に知らなければならず、正確に計算することは容易ではない。そこで、平均を求める代わりに、上下限体理論²に基づいて平均を挟む上下限解を計算する。例えば線形弾性体の場合、

$$c^{\pm} = \langle c \rangle \text{ or } (\langle c^{-1} \rangle)^{-1} \quad (5)$$

は、仮想的ではあるが確定的な上下限体の弾性係数を与える。同様に、式(5)を確率的に変動する弾塑性係数に適用すると、材料特性の変動が小さい場合に、確率的な弾塑性体の上下限体を与えることが示されている。この上下限体を用いて式(4)の平均応力を近似的に計算する。

2.3 有限要素法への組み込み

簡単のため弾性係数 E のみが確率的に変動する場合を考える。式(3)を離散化した次のマトリクス方程式を考える。

$$[K](\omega) [du](\omega) = [df](\omega) \quad (6)$$

ここで $[K]$ は弾塑性係数 c^{ep} に対応した剛性マトリクス、 $[du]$ は離散化された変位増分ベクトル、そして $[df]$ は節点力増分ベクトルである。上下限体と応力平均を使う近似のため、 $[K]$ は確率的に変動する E と応力平均 $\langle \sigma \rangle$ から決定される寄与の積となる。したがって $[K]$ はKL展開することができる。このKL展開で使われ

た ξ_m を用いて $[du]$ をPC展開する。すなわち、

$$\begin{cases} [K](\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m(\omega) [K_m] \\ [du](\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(\omega) [du_n] \end{cases} \quad (7)$$

ここで $[K_m]$ は式(1)の ϕ_m に対応したマトリクス、 $[du_n]$ は式(2)の u_n に対応したベクトルである。また、 Ψ_n はPC展開に現れる Γ_0, Γ_1 等を総称した確率空間上の関数である。式(7)を式(6)に代入し、 Ψ_k を使ったガラーキンを適用すると、最終的に次のマトリクス方程式が導かれる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^M \langle \xi_m \Psi_n \Psi_k \rangle \right) [du_n] = \langle [df] \Psi_k \rangle \quad (8)$$

式(8)の形式から明らかなように、本研究で用いた確率有限要素法は、平均の挙動 $[du_0]$ の他に他のばらつきの挙動 $[du_n]$ も一緒に解かなければならない。したがって、KL展開とPC展開は適当な数で打ち切らなければ、計算量が膨大となる。なお、マトリクス方程式自体は、ヤコビ法のように $[du_0]$ から順に解くことで、それほど計算量を上げずに解くことはできる。一方、剛性マトリクスの $[K_m]$ は各増分での平均応力が必要であり、実際、式(8)は非線形方程式である。このためニュートンラプソン法等の繰り返し計算⁴が必要である(図1参照)。これは平均挙動のみならずばらつきの計算にも適用される。しかし、式(8)が分岐し複数の解を持つときに、ばらつきも計算することは、単に平均挙動を計算するよりも、最も不安定な解を見つけやすいことが期待できる。これは、弾塑性体では、弾性序荷と塑性載荷が場所ごとに異なって起こることが分岐を起こす原因であり、弾塑性係数が序荷によって不連続に変化する場合、最も不安定な解を見つけることは極めて難しい。材料特性のばらつきを考慮すると、弾性序荷と塑性載荷も確率的に変動しながら起こることになるため、確率的には弾塑性係数も滑らかに変化することになる。このため、非線形問題に対する通常の数値解析のように、繰り返し計算中の誤差によって最も不安定な解に自然に到達することが期待できるのである。

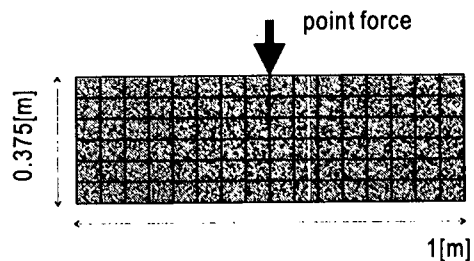


図-2 二次元弾塑性体

² 上下限体理論とは、「確率的に変動する物体に対し、全ひずみエネルギーの上下限を与える、確定的な二つの物体を与える」理論である。

3. 数値計算結果

前章で定式化が示された関数展開を用いた確率有限要素法の妥当性を検証するため、本章ではモンテカルロシミュレーションとの比較を行う。変位等の応答に対し真の確率特性が求められるよう、十分な数のシミュレーションを行っている。対象とした問題は、1) 集中力が作用する二次元問題と、2) 単純化された横ずれ断層の三次元問題の二つである。最後に並列計算による三次元横ずれ断層の数値シミュレーション結果を紹介する。

3.1 二次元問題

集中力が作用する弾塑性体を考える(図2参照)。確率的に変動する材料特性を表1に整理する。

表-1 二次元弾塑性体の材料特性

平均	200[GPa]
変動係数	0.1 ~ 0.3
相関距離	1[m]
確率分布	正規分布

平均応力や上下限体を用いた近似のため、材料特性の変動が大きくなるにつれて、確率有限要素法の精度が低下することが予想される。図3に、材料特性の変動係数(分散/平均)に対して載荷点の鉛直変位の平均と弾性係数との相関係数をプロットする。上限体を用いた確率有限要素法(SFEM[±])の場合、数項の展開を行えばモンテカルロシミュレーション(MCS)の結果と遜色なく、十分精度良く確率特性を計算することがわかる。

載荷点での鉛直・水平方向の確率密度関数を図4に示す。弾性係数の変動係数は0.3であり、上限体を用いている。載荷方向である鉛直方向の変位は対数正規分布、水平方向変位は正規分布に似た確率密度関数を持っている。この確率密度関数は、モンテカルロシミュレーションで計算された確率密度関数と似通っており、確率有限要素法の精度が高いことが示されている。

3.2 三次元問題

単純化された横ずれ断層のモデルとなる弾塑性体を考える。底面と側面は変位が指定され、上面は自由境界である(図5参照)。なおモデルのサイズは(D_x, D_y, D_z) = (160, 200, 40)[m]である。確率的に変動する材料特性を表2に整理する。モンテカルロシミュレーションの計算量を減らすため、要素分割は粗くしている。また、分岐を起こしやすくするため、載荷として加える底面の横ずれに乱れを加えてある。

断層のモデルとなるせん断帯の発生・進展の様子を

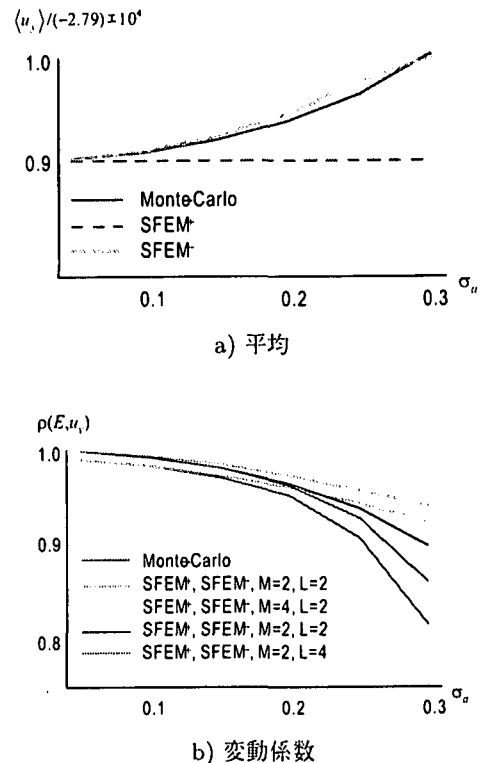
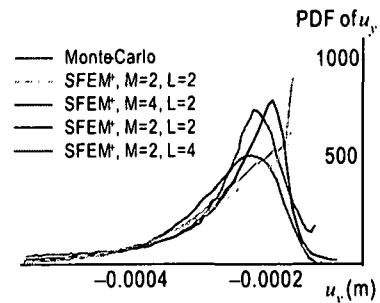
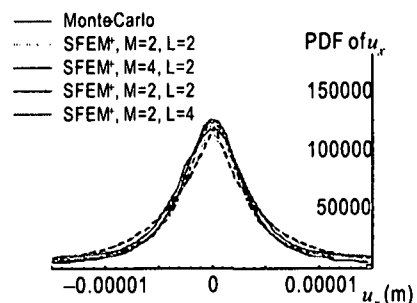


図-3 材料特性のばらつきが応答に与える影響



a) 鉛直方向変位



b) 水平方向変位

図-4 応答の確率密度関数

調べるため、中央の点でのせん断ひずみ ϵ_{12} の平均と変動係数の変化を図6にプロットする。上限体と変動係数0.1を用いている。モンテカルロシミュレーションとの比較により、確率有限要素法は十分精度良く平均を計算することがわかる。また、変動係数の推定も満

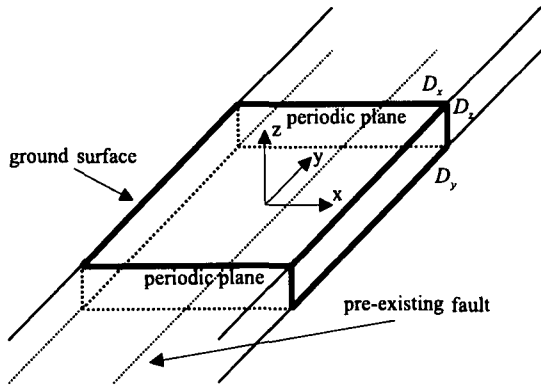


図-5 三次元弾塑性体

表-2 三次元弾塑性体の材料特性

平均	200[GPa]
変動係数	0.1 ~ 0.3
相関距離	160[m]
確率分布	正規分布

足のいくものである。

確率特性の詳細を調べるため、確率密度関数を図7にプロットする。モンテカルロシミュレーションでは、せん断ひずみの確率分布にいくつかのピークがある。これは、設定された材料特性のばらつきによって、分岐解として得られるせん断ひずみの空間分布が異なることに対応している。実際、確率有限要素法の上下限体には二つのせん断帯が上面に現れているが、モンテカルロシミュレーションではこれ以外のパターンでせん断帯が現れている。荷荷が増加するにつれ、初期に現れたさまざまなせん断帯の空間分布のパターンは一つのパターンにまとまる。確率有限要素法もこのパターンに対応した確率密度関数を与えている。

3.3 地表地震断層のシミュレーション

より現実的な横ずれ地表地震断層のモデルに対し、確率有限要素法を適用した計算結果を紹介する。これは断層ずれ方向に周期境界条件(図8参照)を設定し、分岐解として雁行状にせん断帯が発生することを検討したものである。荷重として与える変位は底面・側面とも同様である。なお、要素分割を細かくしたため6CPUの並列計算機(共有メモリ120GB)の計算が必要であった。また、この計算量のため、モンテカルロシミュレーションは行っていない。

図9にせん断帯の発生の状況を示す。底面から表面までの深さ方向のせん断ひずみの平均と分散の分布を3つの滑りに対してプロットしている。一様なずれを与えているにもかかわらず、せん断ひずみが局所的に特定のパターンを形成しながら上に向かって進展し、か

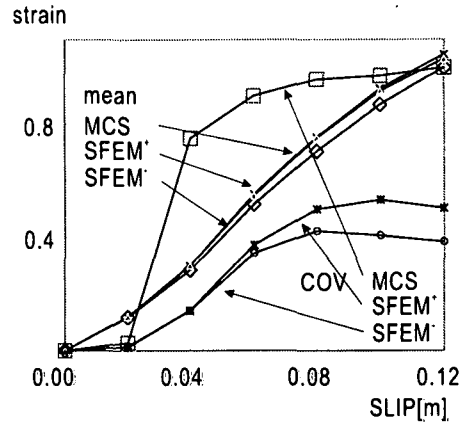
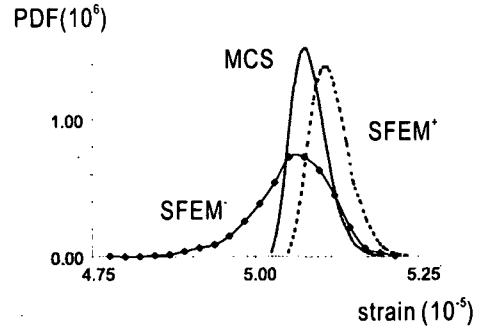
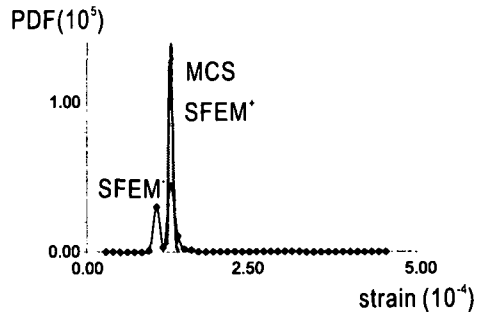


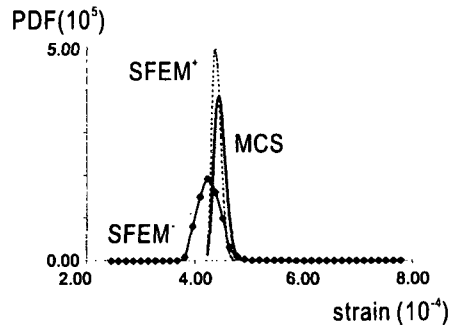
図-6 せん断ひずみの平均と変動係数の変化



a) $\Delta = 0.1$



b) $\Delta = 0.2$



c) $\Delta = 0.6$

図-7 せん断ひずみの確率密度関数の変化

つ、表面に雁行するよう分布していく様子が計算されている。計算の妥当性は検証できないものの、この数値計算結果は、定式化された確率有限要素法の有効性を示唆するものである。

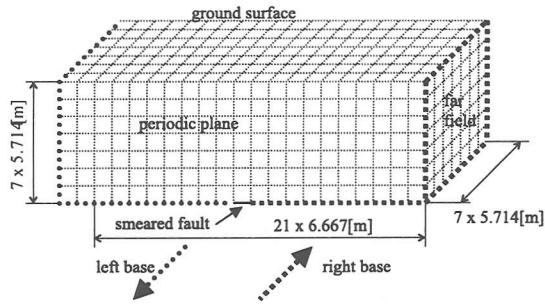


図-8 横ずれ地表地震断層モデル

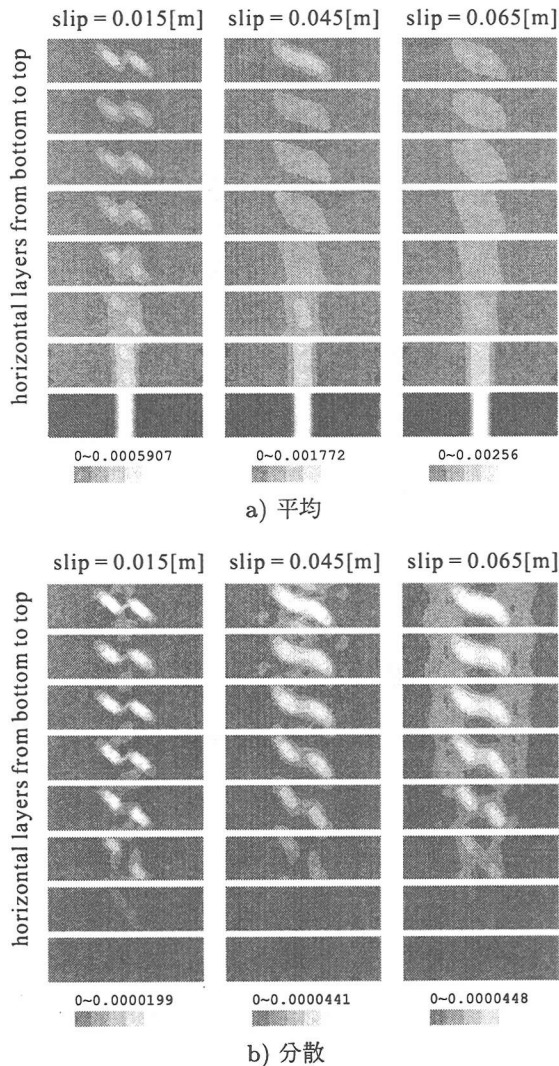


図-9 せん断ひずみの深さ方向分布

4. おわりに

二つの関数展開を用いた確率有限要素法を開発し、簡単な例題を解いて妥当性を検証した。モンテカルロシミュレーションとの比較により、平均・変動係数といった確率特性はもとより、確率密度関数も相当の精度で計算できることが示された。単純化されてはいるが、横ずれ地表地震断層のシミュレーションでは、断層進展

に伴う分岐を再現することには成功した。これは確率有限要素法の潜在的な有効性を示すものである。

参考文献

- 1) <http://wwwweic.eri.u-tokyo.ac.jp/topics/turkey/index-j.html> 参照
- 2) <http://wwwweic.eri.u-tokyo.ac.jp/topics/taiwan/index-j.html> 参照
- 3) M. Anders and M. Hori, Stochastic finite element method for elasto-plastic body, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 46, 1897-1916, (1999).
- 4) R. de Borst, *Computational methods in non-linear solid mechanics*, lecture notes, Delft University of Technology, Dept. of Civil Eng. (1993).
- 5) R.G. Ghanem and P.D. Spanos, *Stochastic finite elements: a spectral approach*, Springer, Berlin (1991).
- 6) R.G. Ghanem and P.D. Spanos, Spectral stochastic finite element formulation for reliability analysis, *J. Eng. Mech.*, ASCE, 117(10), 2351-2372 (1991).
- 7) M. Hori and S. Munashinge, Generalized Hashin-Shtrikman variational principle for boundary-value problem of linear and non-linear heterogeneous body, *Mechanics of Materials*, 31, 471-486, (1999).
- 8) 水谷 俊夫, 堀 宗朗, 雁行状断層のモデル実験と応力場逆解析による構成則推定法, 応用力学論文集, 2, 7-13, 1999.
- 9) J. Zhang, B. Ellingwood, Orthogonal series expansions of random fields in reliability analysis, *J. Engrg. Mech.*, ASCE, 120(12), 2660-2677 (1994).

(2000年4月21日受付)