

(11) 不確定なスペクトルを持つ地震波動場の確率論的内挿

京都大学工学部 正員 盛川 仁
京都大学防災研究所 正員 亀田 弘行

1. はじめに

近年、地震動の確率論的内挿法が多数提案されてきているが^(1)~5)、いずれの手法でも、スペクトル特性が事前に確定的に与えられているものとして理論展開が行われていた。しかし、一般には将来の地震動に対してスペクトル特性を事前に決定しておくことは容易ではない。さらに、実際の観測記録をみると、ほとんど同じような地盤上で観測された記録であっても、それらのスペクトル特性が非常に異なる場合がしばしばある。そこで本研究では、スペクトル特性の不確定性を考慮したうえで、事前にスペクトル特性がわかっていない場合であっても、観測記録をもとにしてその波動場のスペクトル特性を推定し、そのうえで地震波動場の評価を行うための手法を示す。この手法は、条件付確率場に関する理論を拡張し、スペクトルの単なる内挿ではなく、その推定誤差についても同時に定量的な評価を与えるものである。さらにスペクトル特性の推定誤差が波動場の推定に及ぼす影響について理論的な検討を行なう。

筆者らは既に、一回のイベントによる観測記録をもとにそのイベントのパワースペクトルを条件付シミュレーションによって推定する手法を提案している⁶⁾。しかしこの手法は、理論的には簡単であるが、均一な確率場を仮定しているために応用範囲が限られていた。以下では、より現実にもつれたデータ処理を行なうことができるように、パワースペクトルの確率分布に対して近似を導入し、地盤条件がゆるやかに変化する場合でも適用可能な手法を提案する。

2. パワースペクトルの確率論的内挿

本手法では、サイト毎の特性を表現するために、パワースペクトルをサイト特性とそこからのランダム成分との積に分離して、それぞれを空間的に内挿する。

時間軸上での確率過程が定常正規過程ならば、スムージングを行なって得られるパワースペクトルは一般に大きな自由度を持つ χ^2 分布に従う。分布の裾の形まで厳密に議論することを目的としているわけではないので、各調和成分毎のパワースペクトルの周辺確率分布が対数正規分布に従うという近似を導入する。すなわち、サイト*i*における振動数 f_k でのパワースペクトル S_{iik} の周辺確率密度関数が次のように表されるものとする。

$$f_{S_{iik}}(s_{iik}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta_{ik}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln s_{iik} - \lambda_{ik}}{\zeta_{ik}} \right)^2 \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

サイト特性は基準となるサイトにおけるスペクトルに対するスペクトル比で表すものとする、サイト*i* ($i = 1, 2, \dots, n$)におけるパワースペクトルは一般性を失うことなく $S_{ii}(f) = S_{ii}^r(f)S_{ii}^{\bar{r}}(f)$ と表現できる。ただし、 $S_{ii}^r(f) = S_{ii}(f)/S_{11}(f)$ で、 $S_{ii}^{\bar{r}}(f)$ はスペクトル比からのランダム成分である。両辺の対数をとると、

$$\ln S_{ii}(f) = \ln S_{ii}^r(f) + \ln S_{ii}^{\bar{r}}(f) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

となり、上記の仮定に従えば、右辺第1項はサイト特性を表す確定量、第2項はサイト特性からのバラツキを表す定常正規過程となる。

サイト特性 $S_{ii}^r(f)$ は空間内でゆるやかに変化する量であるから、未観測点における値は観測点で得られた値を線形補間することによって求めればよい。また、サイト特性は一回のイベントだけでは十分な精度で決定できないので、イベント毎に各観測点におけるスペクトル比を求め、それらの相乗平均を用いて更新していく。事前情報として $S_{ii}^r(f)$ (または $S_{ii}^{\bar{r}}(f)$)が与えられている場合には、観測されたスペクトル比を用いてイベント毎に、ベイズ統計学的な手法により更新して $S_{ii}^r(f)$ を求めればよい。このように提案手法は、事前情報の有無にかかわらず、推定を行う時点で利用できる情報を無駄なく活用しつづることが可能である。

一方、ランダム成分 $\ln S_{ii}^f(f)$ は基準点にとったサイトの影響を一様に受けるものの、各サイトに固有の特性は含まれていないので、場所によらず同じ確率論的性質を持つものと考えられる。そこで、未観測点における $\ln S_{ii}^f(f)$ は、そのDC成分を線形補間によって、残りの平均値0の定常正規過程については条件付確率場の理論を適用することによって求める。その際、 $\ln S_{ii}^f(f)$ の確率論的性質が空間的に一様であるという仮定に基づき、quefrequency 領域での cepstrum は場所によらず同じものとして観測記録の算術平均を用い、コヒーレンス関数は quefrequency に対して指数的に減少する関数をあてはめる⁷⁾。

以上のようにして、たとえスペクトル特性に関する事前情報がなくても、観測記録だけを用いて、更新と線形補間により $S_{nn}^r(f)$ を、条件付確率場の理論により $\ln S_{nn}^f(f)$ の条件付期待値及び分散を推定することができる。本項の目的である $S_{nn}(f)$ を推定するためには、以上の結果を組み合わせて式(1)の λ_{nk} と ζ_{nk} を求めればよい。すなわち、 $\ln S_{nn}^r$ の推定値を $\ln \hat{S}_{nn}^r(f)$ とすると、

$$\lambda_{nk} = \ln \hat{S}_{nn}^r(f_k) + E[\ln S_{nn}^f(f_k) | \text{cnd.}] \quad (3a)$$

$$\zeta_{nk}^2 = \text{Var}[\ln S_{nn}^f(f_k) | \text{cnd.}] \quad (3b)$$

となり、 $S_{ii}(f)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) によって条件づけられた未観測サイト n におけるパワースペクトル $S_{nn}(f)$ の確率論的性質が、式(1)の近似のもとで完全に記述されたことになる。ただし、事前の情報が無い場合、最初のイベントでは $S_{ii}^f(f) \equiv S_{11}(f)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) となり、ランダム成分を検出できず、 $\ln S_{ii}^f(f)$ の単なる線形補間として $S_{nn}(f)$ が推定されることに注意が必要である。

図1に測線の両端で観測が行われた場合のパワースペクトルの確率論的内挿結果の一例を示す。

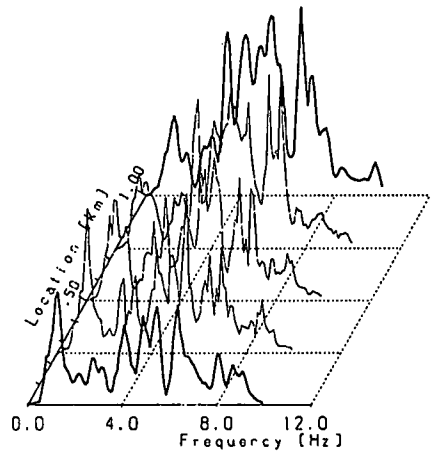


図1 条件付シミュレーションによって内挿されたパワースペクトルの例(両端観測点)

3. 確率論的に内挿されたパワースペクトルの推定誤差

上記の結果を用いることで、未観測点でのパワースペクトルをシミュレートすることが可能となった。得られたパワースペクトルの推定誤差については、式(3)に示した対数正規分布のパラメータを用いてただちに求めることができる。確率分布を近似したことによって混入する系統的な誤差に対して注意を払う必要があるが、既に述べたように、分布の裾部の形に関する厳密な議論を行うわけではないのでこの点で問題が生じることはないと考えている。

図2に図1で推定されているパワースペクトルの条件付期待値及び標準偏差を各地点毎に示した。

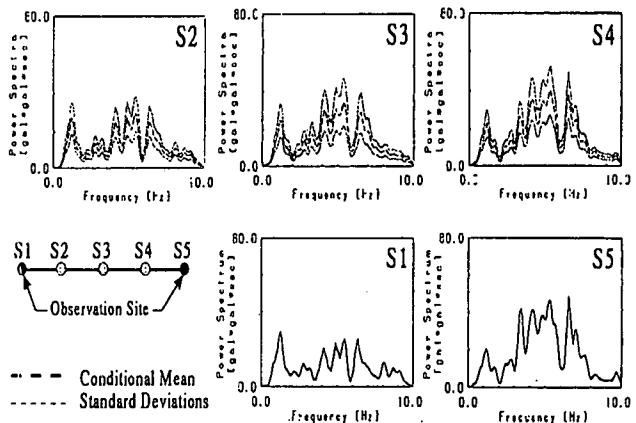


図2 推定されたパワースペクトルの条件付期待値と標準偏差

4. ランダムなパワースペクトルをもつ地震波動場の確率論的性質

上で述べた手法により観測記録を用いて場を規定するパワースペクトルを確率論的に求めることができるので、得られたパワースペクトルを基に波動場を推定することが可能となる。従来の条件付確率場の理論では確定的に与えられたスペクトルを前提として波動場の推定誤差の評価を行なっているが⁵⁾、不確実性を有するスペクトルを扱うに際して、パワースペクトルの推定誤差を考慮した上で、波動場の誤差の評価法を従

来の理論と矛盾しないように与える必要がある。以下では、一般性を失うことなく、 n ヶ所のサイトのうち $(n-1)$ ヶ所で観測が行われており、サイト n での波形 $U_n(t|cnd.)$ を推定しようとしているものとして議論をすすめる。

$U_n(t|cnd.)$ のフーリエ係数の条件付期待値及び分散について、従来の計算結果³⁾に若干の変形を加えた後、サイト n におけるパワースペクトル S_{nnk} の関数としてそれらを表現しなおすと、次のようになる。

$$\langle A_{nk} | cnd. \rangle = \alpha_{A_k} \sqrt{S_{nn}(f)}, \quad \langle B_{nk} | cnd. \rangle = \alpha_{B_k} \sqrt{S_{nn}(f)}, \quad \sigma_{A_{nk}|cnd.}^2 = \sigma_{B_{nk}|cnd.}^2 = \alpha_k S_{nn}(f) \quad (4)$$

ここで、 $\alpha_{A_{nk}}$ と $\alpha_{B_{nk}}$ は観測波のフーリエ係数とパワーおよびクロススペクトル $S_{ij}(f)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1, j = 1, 2, \dots, n$) に依存し、 α_k は $S_{ij}(f)$ のみに依存する。

式(1)を用いてフーリエ係数の条件付期待値 $\langle A_{nk} | cnd. \rangle$ 及び条件付分散の $\sigma_{nk|cnd.}^2$ の確率密度関数を求めると、

$$f_{\mu_{A_{nk}}}(\mu_{A_{nk}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \zeta_{nk}} \frac{1}{\mu_{A_{nk}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{\mu_{A_{nk}}}{\alpha_{A_k}} \right) - \frac{\lambda_{nk}}{2}}{\zeta_{nk}} \right)^2 \right] \quad (5a)$$

$$f_{v_{nk}}(v_{nk}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \zeta_{nk}} \frac{1}{v_{nk}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{v_{nk}}{\alpha_k} \right) - \lambda_{nk}}{\zeta_{nk}} \right)^2 \right] \quad (5b)$$

となる。ただし、 $\mu_{A_{nk}} \equiv \langle A_{nk} | cnd. \rangle$ 、 $v_{nk} \equiv \sigma_{nk|cnd.}^2$ であり、フーリエ係数 B_{nk} については A を B に置換えるだけで得られる。式(5)の1次及び2次のモーメントから期待値及び分散を求めることができる。

$U_n(t|cnd.)$ はフーリエ係数の線形和で表されることを考慮すると、中心極限定理により $U_n(t|cnd.)$ の条件付期待値及び分散はそれぞれ正規確率変量となると考えることができる。このことは、スペクトルのもつ不確定性が、条件付確率過程の確率論的性質の推定結果に対して、正規的なゆらぎを上乗せするという形で表現されているということができる。このとき、条件付確率過程 $U_n(t|cnd.)$ の条件付期待値 $\mu_{U_n|cnd.}(t)$ の期待値及び分散は、

$$E[\mu_{U_n|cnd.}(t)] = \sum_k \exp \left[\frac{\lambda_{nk}}{2} + \frac{\zeta_{nk}^2}{8} \right] \{ \alpha_{A_k} \cos \omega_k t + \alpha_{B_k} \sin \omega_k t \} \quad (6a)$$

$$\text{Var}[\mu_{U_n|cnd.}(t)] = \sum_k e^{\lambda_{nk}} (e^{\frac{\zeta_{nk}^2}{2}} - e^{\frac{\zeta_{nk}^2}{4}}) \{ \alpha_{A_k}^2 \cos^2 \omega_k t + \alpha_{B_k}^2 \sin^2 \omega_k t \}, \quad (6b)$$

また、条件付分散 $\sigma_{U_n|cnd.}^2$ は、

$$E[\sigma_{U_n|cnd.}^2] = \sum_k \alpha_k \exp \left[\lambda_{nk} + \frac{\zeta_{nk}^2}{2} \right] \quad (7a)$$

$$\text{Var}[\sigma_{U_n|cnd.}^2] = \sum_k \alpha_k^2 (e^{\zeta_{nk}^2} - 1) \exp \left[2\lambda_{nk} + \zeta_{nk}^2 \right] \quad (7b)$$

となる。図3~6に式(6)及び(7)を数値計算によって求めた例を示す。この計算例では標準偏差が期待値に比べて非常に小さくなっていることがわかる。このことが波動の確率論的内挿の一般的な傾向として成立するものかどうかについては、今後の検討を要するものと考えている。

なお、 S_{nnk} が $S_{nnk} = \hat{S}_{nnk}$ として誤差なしで与えられるならば、未観測点 n における条件付確率過程 $U_n(t|cnd.)$ の期待値及び分散は、それぞれ式(6a)の $E[\mu_{U_n|cnd.}]$ 、式(7a)の $E[\sigma_{U_n|cnd.}^2]$ に一致する。このことより、不確定性を有するスペクトルの導入によって、従来の条件付確率場の理論が矛盾なく拡張されることがわかる。

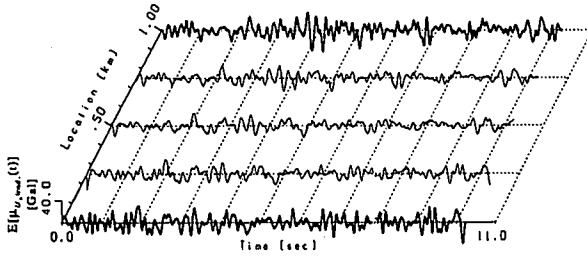


図3 $U(t | cnd.)$ の条件付期待値の期待値 $E[\mu_{U_n|cnd.}(t)]$

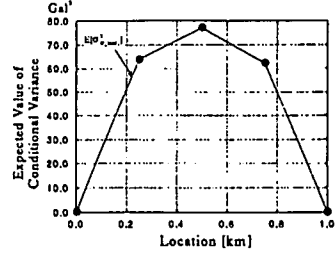


図5 $U(t | cnd.)$ の条件付分散の期待値 $E[\sigma^2_{U_n | cnd.}]$

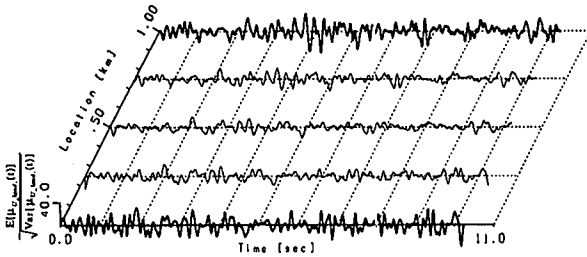


図4 $U(t | cnd.)$ の条件付期待値の変動係数の逆数 $E[\mu_{U_n|cnd.}(t)] / \sqrt{\text{Var}[\mu_{U_n|cnd.}(t)]}$

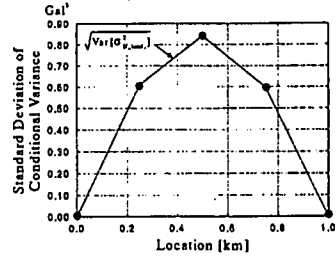


図6 $U(t | cnd.)$ の条件付分散の標準偏差 $\sqrt{\text{Var}[\sigma^2_{U_n | cnd.}]}$

4. おわりに

本研究では条件付確率場の理論を応用したパワースペクトルの確率論的内挿法を示し、地震波動場の推定を行う際のデータの実用的な処理法を提案するとともに、推定結果の精度評価のための手法も示した。また、確率論的に推定されたパワースペクトルの推定誤差を考慮した条件付確率過程の確率論的性質を解析的に誘導し、従来の条件付確率場の理論の拡張として表現した。以上より、観測記録に基づき、トータルな推定誤差を評価しつつ地震波動場の確率論的推定を行なうことが可能となった。今後は、地盤条件が急激に変化するような場所であっても地盤情報を利用することで波動場の推定を可能とする手法の開発を行うと共に、本研究では触れられていないクロススペクトルを合理的に決定するための手法を検討する。また、データ処理結果の妥当性を客観的に評価する指標を導入したうえで、実観測記録に適用していく予定である。

参考文献

- 1) Vanmarcke, E., and Fenton, G., "Conditional Simulation of Local Fields of Earthquake Ground Motions," *Structural Safety*, Vol.10, pp.247-264, 1991.
- 2) 川上英二・小野牧夫：一地点での観測記録を用いた時空間地震波形のシミュレーション，土木学会論文集，441号/I-18, pp.167-175, 1992.
- 3) Kameda, H., and Morikawa H., "An Interpolating Stochastic Process for Simulation of Conditional Random Fields," *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.7, pp.243-254, 1992.
- 4) 星谷 勝・桑名智英：条件付確率場のシミュレーション理論の検証，土木学会論文集，No. 477/I-25, pp.93-96, 1993.10.
- 5) Kameda, H. and Morikawa, H., "Conditioned Stochastic Processes for Conditional Random Fields," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.120, No.4, pp.855-875, 1994.4.
- 6) 盛川 仁・亀田弘行：地震動場におけるパワースペクトルの確率論的内挿，第9回日本地震工学シンポジウム論文集，pp.259-264, 1994.
- 7) Chernov, L. (translated from the Russian by R. Silverman), *Wave Propagation in a Random Medium*, Dover Publications, Inc., New York, 1960.