

定常不規則振動を用いた 非定常地震応答エネルギーの簡単な推定法

青 木 繁¹

¹正会員 工博 東京都立工業高等専門学校助教授 機械工学科 (〒140-0011 東京都品川区東大井1-10-40)

地震動のような非定常不規則振動入力を受ける構造物の応答解析は複雑である。本報告では、定常不規則振動応答を用いて非定常不規則振動応答特性を簡便に推定する方法を提案した。この方法を用いて自乗平均応答を求めた。その結果、応答の自乗平均値の最大値は厳密解より大きな値を与えることが明らかになった。また、自乗平均値を時間に関して0から無限大まで積分した値は厳密解と一致した。積分値は地震応答エネルギーとも関連し、提案した方法は非定常不規則振動応答特性を簡便に推定するために有用であるといえる。

Key Words : *Vibration, Random Vibration, Mean Square Response, Envelope Function, Nonstationary Random Process*

1. 緒言

構造物が地震動のような非定常不規則振動入力を受ける場合には、当然のことながら応答も非定常不規則振動となる。非定常不規則振動応答を理論的に求める方法は一般に複雑であり、計算時間もかかる^{1), 2)}。そのため、非定常不規則振動応答を簡便に求める近似解法方法も提案されている³⁾。

本報告では、定常不規則振動応答を用いた非定常不規則振動応答特性の簡便な推定法を提案する。解析モデルとして、1自由度系を用いた。入力としては、非定常白色雑音を用いた。非定常白色雑音は定常白色雑音に振幅非定常特性を表す包絡関数を乗じることによって作成されるものとした。応答としては不規則振動応答特性を評価する上でよく使われる自乗平均値に注目した。非定常不規則振動応答の自乗平均値を定常不規則振動応答の自乗平均値に包絡関数の自乗を乗じて求めた。定常不規則振動応答の自乗平均値は教科書に公式として書かれている⁴⁾。自乗平均値の最大値、最大値の生起時刻、自乗平均値の時間に関する積分を求めた。特に、自乗平均値の積分は地震応答エネルギーに関連するものである。いくつかの減衰比と固有振動数についてモーメント方程式から得られた非定常不規則振動応答の自乗平均値と比較した。

2. 解析モデルと入力地震動

解析モデルとして、図1に示す1自由度系を用いた。相対変位 $z (=x-y)$ に関する運動方程式は、

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_n \dot{z} + \omega_n^2 z = -\ddot{y} \quad (1)$$

ここで、 ζ は減衰比、 ω_n は固有円振動数である。入力地震動 $y(t)$ として、非定常白色雑音を用いた。非定常白色雑音は定常白色雑音 $s_y(t)$ に振幅非定常特性を表す包絡関数 $I(t)$ を乗じることによって作成されるものとした。 $\ddot{y}(t)$ は次式で表される。

$$\ddot{y}(t) = I(t)s_y(t) \quad (2)$$

本報告では、包絡関数は次式で表されるものとした。

$$I(t) = (e^{-at} - e^{-bt}) / |e^{-at} - e^{-bt}|_{\max} \quad (3)$$

a および b の値はそれぞれ0.125および0.25とした。図2に包絡関数を示す。

3. 定常近似

相対変位応答 z の自乗平均値は自己相関関数を用いて次式で与えられる。

$$R_z(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega, t_1)G^*(\omega, t_2)S_0d\omega \quad (4)$$

ここで、

$$G(\omega, t) = \int_0^t h(t-\xi)I(\xi)e^{i\omega\xi}d\xi \quad (5)$$

$$h(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \quad (6)$$

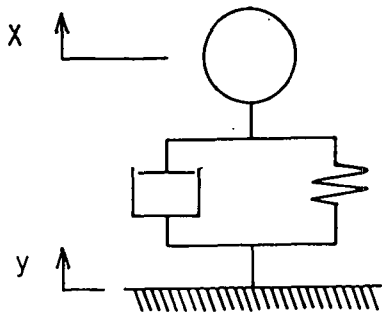


図1 解析モデル

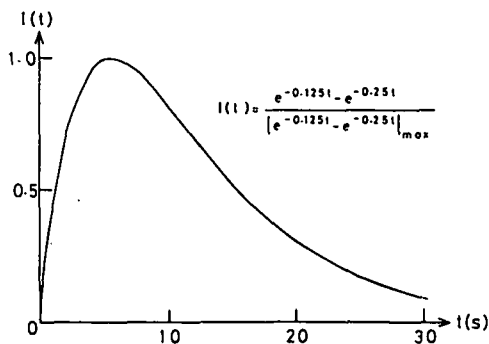


図2 包絡関数

$G^*(\omega, t)$ は $G(\omega, t)$ の共約複素数である。 S_0 は白色雑音のパワースペクトル密度である。相対速度応答 z の自己相関関数と z および z の相互相関関数は、

$$R_z(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_z(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \quad (7)$$

$$R_{z\dot{z}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_z(t_1, t_2)}{\partial t_2} \quad (8)$$

変位応答および速度応答の自乗平均値それぞれ σ_z^2 および $\sigma_{\dot{z}}^2$ 、変位応答と速度応答の共分散は、

$$\sigma_z^2(t) = R_z(t, t) \quad (9)$$

$$\sigma_{\dot{z}}^2(t) = R_{\dot{z}\dot{z}}(t, t) \quad (10)$$

$$\kappa_{z\dot{z}}(t) = R_{z\dot{z}}(t, t) \quad (11)$$

これらは次のモーメント方程式からも得られる。

$$\frac{d\sigma_z^2}{dt} = 2\kappa_{z\dot{z}}$$

$$\frac{d\sigma_{\dot{z}}^2}{dt} = -4\zeta\omega_n\sigma_{\dot{z}}^2 - 2\omega_n^2\kappa_{z\dot{z}} + 2\pi S_0\{I(t)\}^2$$

$$\frac{d\kappa_{z\dot{z}}}{dt} = \sigma_{\dot{z}}^2 - 2\zeta\omega_n\kappa_{z\dot{z}} - \omega_n^2\sigma_z^2 \quad (12)$$

式(4)の積分は複雑である。簡単のため、 $I(t)$ が積分の外に出せると仮定すると、式(9)および(10)は次のように表される。

$$\sigma_z^2(t) = \{I(t)\}^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_d(\omega)|^2 S_0 d\omega \quad (13)$$

$$\sigma_{\dot{z}}^2(t) = \{I(t)\}^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_v(\omega)|^2 S_0 d\omega \quad (14)$$

ここで、 $H_d(\omega)$ および $H_v(\omega)$ はそれぞれ変位応答および速度応答の周波数伝達関数である。式(13)および(14)は定常不規則振動応答に対するものである。定常不規則振動では $\kappa_{z\dot{z}}$ は0である。1自由度系に対して、式(13)および(14)は次のようになる。

$$\sigma_z^2(t) = \frac{\pi}{2\zeta\omega_n^3} \{I(t)\}^2 S_0 \quad (15)$$

$$\sigma_{\dot{z}}^2(t) = \frac{\pi}{2\zeta\omega_n} \{I(t)\}^2 S_0 \quad (16)$$

自乗平均値の時間に関する積分は次のように表される。

$$I_z = \int_0^{\infty} \sigma_z^2(t) dt \quad (17)$$

定常不規則振動応答に対して、 I_z は次のように与えられる。

$$I_z = \frac{(a-b)^2}{2ab(a+b)} \frac{\pi}{2\zeta\omega_n^3} S_0 \quad (18)$$

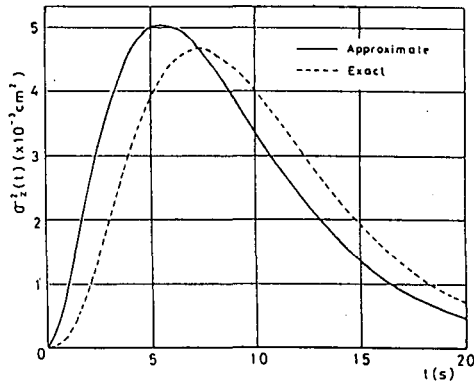
I_z は地震応答エネルギーに関連するものである。

4. 数値計算結果

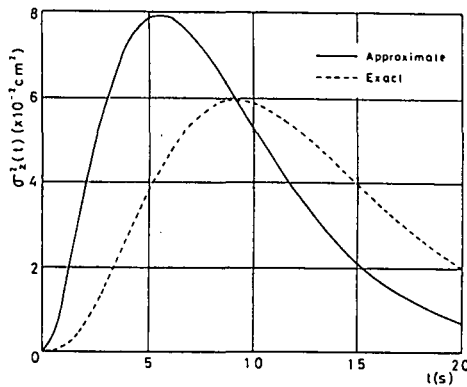
図3(a)、(b)および(c)にそれぞれ減衰比 $\zeta=0.01$ 、固有周期 $T_n(2\pi/\omega_n)=0.2s$ とした場合、 $\zeta=0.01$ 、 $T_n=0.5s$ とした場合および $\zeta=0.05$ 、 $T_n=0.5s$ とした場合の変位応答の自乗平均値 σ_z^2 を示す。これらの値は定常白色雑音のパワースペクトル密度が $1\text{cm}^2/\text{s}^3$ の場合のものである。また、近似値が定常近似で求めた値、厳密解が式(12)のモーメント方程式から求めた値である。図3(a)と3(b)を比較すると、固有周期が短くなると近似値は厳密解に近づく。最大値の生起時刻は固有周期が長くなると差が大きくなる。図3(b)と3(c)を比較すると、近似値は減衰比が大きくなると厳密解に近づく。最大値の生起時刻は減衰比が小さくなるにつれて差が大きくなる。

図3の結果を詳細に検討するために、表1および表2にいくつかの ζ および T_n に対する変位応答の自乗平均値 σ_z^2 の最大値および最大値の生起時刻を示す。自乗平均値の最大値は定常近似から求めた値の方が大きく、最大応答の生起時刻は定常近似から求めた値の方が早い。いずれも減衰比が大きくなるにつれて、固有周期が短くなるにつれて厳密解に近づく。

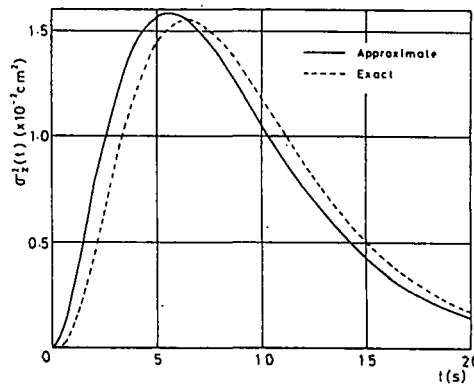
このように、定常近似から得られた応答の自乗平均値の最大値は厳密解よりも大きい。近似値と厳密解の間には簡単な関係がある。最大値の厳密解を $(\sigma_{ze^2})_{\max}$ とし、定常近似から得られた値を $(\sigma_{za^2})_{\max}$ とすると、 $(\sigma_{ze^2})_{\max}$ は $(\sigma_{za^2})_{\max}$ を用



(a) $\zeta=0.01, T_n=0.2s$



(b) $\zeta=0.01, T_n=0.5s$



(c) $\zeta=0.05, T_n=0.5s$

図3 応答の自乗平均値

いて次の式から得られる。

$$(\sigma_{ze^2})_{\max} = \frac{256\zeta}{1+256\zeta} \frac{11}{10(1+T_n)} \frac{105}{100} (\sigma_{za^2})_{\max} \quad (19)$$

表3(a)および3(b)に自乗平均値の時間に関する積分値 I_z を示す。定常近似によって求めた値はすべての減衰比および固有周期に対して厳密解と一致している。自乗平均値の積分値は地震応答エネルギーとも関連し、本報告で提案した定常近似によって簡便に地震応答エネルギーを求めることができる。

5. 数値シミュレーション

応答の自乗平均値の時間に関する積分を数値シミュレーションによって検討した。相対速度応答および絶対加速度応答に関する自乗平均値の積分値も求めた。これらの理論解はそれぞれ次のような式で求まる。

$$I_z = \frac{(a-b)^2}{2ab(a+b)} \frac{\pi}{2\zeta\omega_n} S_0 \quad (20)$$

$$I_{\dot{x}} = \frac{(a-b)^2}{2ab(a+b)} \frac{(1+4\zeta^2)\pi}{2\zeta\omega_n^3} S_0 \quad (21)$$

表4に得られた結果を示す。表4は100のサンプルの平均値である。表中には $\zeta=0.02$ および $T_n=0.2s$ の場合の定常近似で求めた値、非定常応答計算で求めた値および理論解析によって得られた値（厳密解）を示す。定常近似から求めた値は非定常応答計算で求めた値および厳密解とよく一致している。

6. 結言

非定常白色雑音を入力として受ける1自由度系の応答の自乗平均値を近似的に求める方法を提案し、非定常応答解析によって求めた値（厳密解）と比較した。定常近似から求めた自乗平均値の最大値は厳密解より大きい。最大値の生起時刻は厳密解よりも早い。定常近似によって求めた応答の自乗平均値の最大値および最大値の生起時刻は減衰比が大きくなるほど、固有周期が短くなるほど厳密解に近づく。

定常近似によって求めた自乗平均値の時間に関する積分値は、減衰比および固有周期によらずに厳密解と一致する。また、このことを数値シミュレーションによって確認した。自乗平均値の積分値は地震応答エネルギーと関連する。したがって、本報告で提案した定常近似によって簡便に地震応答エネルギーを求めることができる。

参考文献

- 1) Iyengar, R.N. and Iyengar, K.T.S.R.: Probabilistic response analysis to earthquakes, *Proc. of ASCE Engineering Mechanics Division*, Vol.96 June, pp. 207-225, 1970.
- 2) Lin, Y.K.: *Probabilistic theory of structural dynamics*, McGraw-Hill, 1967
- 3) Hasselman, T.: Probabilistic displacement time history of a single degree of freedom system, *Proc. of ASCE Engineering Mechanics Division*, Vol. 98 June, 1972, 519-530.

表1 応答の自乗平均値の近似値と厳密解の比較($\zeta=0.01$)

T_n (s)	最大値 (cm^2)		最大値生起時刻 (s)	
	近似値	厳密解	近似値	厳密解
0.1	6.33×10^{-4}	6.19×10^{-4}	5.55	6.44
0.2	5.07×10^{-3}	4.67×10^{-3}	5.55	7.33
0.3	1.71×10^{-2}	1.47×10^{-2}	5.55	8.06
0.4	4.05×10^{-2}	3.24×10^{-2}	5.55	8.68
0.5	7.92×10^{-2}	5.93×10^{-2}	5.55	9.20

表2 応答の自乗平均値の近似値と厳密解の比較($T_n=0.5\text{s}$)

ζ	最大値 (cm^2)		最大値生起時刻 (s)	
	近似値	厳密解	近似値	厳密解
0.01	7.92×10^{-2}	5.93×10^{-2}	5.55	9.20
0.02	3.96×10^{-2}	3.53×10^{-2}	5.55	7.71
0.05	1.58×10^{-2}	1.55×10^{-2}	5.55	6.45
0.10	7.92×10^{-3}	7.87×10^{-3}	5.55	5.98

表3 応答の自乗平均値の積分値の近似値と厳密解の比較

(a) $\zeta=0.01$

(b) $T_n=0.5\text{s}$

T_n (s)	積分値 ($\text{cm}^2 \cdot \text{s}$)	
	近似値	厳密解
0.1	6.76×10^{-3}	6.75×10^{-3}
0.2	5.40×10^{-2}	5.40×10^{-2}
0.3	1.82×10^{-1}	1.82×10^{-1}
0.4	4.32×10^{-1}	4.32×10^{-1}
0.5	8.44×10^{-1}	8.44×10^{-1}

ζ	積分値 ($\text{cm}^2 \cdot \text{s}$)	
	近似値	厳密解
0.01	8.44×10^{-1}	8.44×10^{-1}
0.02	4.22×10^{-1}	4.22×10^{-1}
0.05	1.69×10^{-1}	1.69×10^{-1}
0.10	8.44×10^{-2}	8.44×10^{-2}

表4 数値シミュレーションによる応答の積分値と厳密解の比較($\zeta=0.02, T_n=0.2\text{s}$)

	近似計算	非定常計算	厳密解
加速度 ($\text{cm}^2/\text{s}^4 \cdot \text{s}$)	1.00×10^4	1.07×10^4	1.05×10^4
速度 ($\text{cm}^2/\text{s}^2 \cdot \text{s}$)	6.34×10	6.75×10	6.66×10
変位 ($\text{cm}^2 \cdot \text{s}$)	4.01×10^{-1}	4.29×10^{-1}	4.22×10^{-2}