

位相情報を利用した非定常地震動 のシミュレーション法

佐藤 忠信¹・室野剛隆²

¹正会員 工博 京都大学防災研究所教授(〒611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

²正会員 工博 鉄道総合技術研究所(〒185-8540 東京都国分寺市光町 2-8-38)

地震動は因果性を有しているので、振幅と位相を独立に与えることができないことは良く知られている。しかし、これまでは振幅スペクトルが与えられたときに位相スペクトルにどのような拘束条件を与えれば、因果性を満たす地震動がシミュレートできるかが明確ではなかった。そこで、地震動の位相スペクトルに着目して、因果性を満たすような地震動のフーリエスペクトル振幅を位相スペクトルから求める方法論を新しく開発した。開発した方法論を用いて、位相スペクトルから波形を合成する方法を展開した。

Key Words : Causality, phase spectrum, non-stationarity, simulation of earthquake motion

1. はじめに

地震動のような非定常特性を有している時刻暦信号を模擬するためには、振幅特性と位相特性のモデル化が必要であるが、これまでは振幅特性に重点がおかれ、位相のモデル化についてはあまり焦点が当てられなかったようである。振幅特性についてはパワースペクトルの非定常性をモデル化¹⁾することが一般的で、モデル化された非定常パワースペクトルから時刻暦を模擬するためにはランダム位相が用いられてきた。しかし、位相の持つ物理的な意味が明確でなかった。

そこで、大崎ら²⁾はフーリエ位相差分布と時刻歴包絡形との類似性を指摘し、和泉・勝倉は³⁾フーリエ位相の角振動数軸上での傾き(群遅延時間)に着目して、その平均値と標準偏差により地震波の重心位置と広がりを表現できることを示した。石井ら⁴⁾、佐藤ら⁵⁾は、位相差分布や群遅延時間の特性を、多数の強震記録に基づいた回帰分析によりモデル化し、非定常性を有する地震波形の合成法について検討している。

著者らも、地震動の位相特性のモデル化の意義について述べるとともに、モデル化について一連の研究を行った⁶⁾。この方法では地震動を模擬するため

に、振幅特性を設計用の応答スペクトルで定義したので、振幅と位相スペクトルが独立にモデル化されていた。しかし、振幅と位相を各々独立にモデル化して、非定常な地震波形を合成する方法は本質的な矛盾を抱えている。それは、因果性を有する時系列のフーリエ変換の実数部と虚数部は独立ではなく、Hilbert 変換の関係で結び付けられているためである。したがって、振幅スペクトルをモデル化した場合には、位相スペクトルに何らかの制限が設けられなければならない。本研究はこの点を矛盾なく解決するため、位相スペクトルに着目した波形の合成方法を新たに提案するものである。

2. 位相スペクトルと振幅スペクトルの関係

因果律を満たす実時間関数を y_m とし、以下のような偶関数 y_m^e と奇関数 y_m^o を定義する。

$$y_m^e = \frac{1}{2}(y_m + y_{-m}), \quad y_m^o = \frac{1}{2}(y_m - y_{-m}) \quad (1)$$

この場合は $y_{-m}^e = y_m^e$ かつ $y_{-m}^o = -y_m^o$ となる。したがって $y_m = y_m^e + y_m^o$ と次式の関係が得られる。

$$y_m^o = \operatorname{sgn}(m) \cdot y_m^e, \quad y_m^e = \operatorname{sgn}(m) \cdot y_m^o \quad (2)$$

ここに、 $\operatorname{sgn}(m)$ は m が負の時は -1.0 、 m が正の時は 1.0 の値を持つ符号関数である。また、 y_m^e が偶関数

であることに着目すると、

$$y_m^e = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} C_k \cdot e^{i\left(\frac{2\pi km}{N}\right)} = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \left[\Re(C_k) \cdot \cos \frac{2\pi km}{N} \right] \quad (3)$$

となるので、これを式(2)の第1式に代入すれば、次式を得る。

$$y_m^o = \begin{cases} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \left[\Re(C_k) \cdot \cos \frac{2\pi km}{N} \right] & m > 0 \\ 0 & m = 0 \\ - \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \left[\Re(C_k) \cdot \cos \frac{2\pi km}{N} \right] & m < 0 \end{cases} \quad (4)$$

一方、奇関数 y_m^o のフーリエ係数は次のように与えられる。

$$C_l = i\Im(C_l) = -i \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{N/2-1} \left[y_m^o \cdot \sin \left(\frac{2\pi lm}{N} \right) \right] \quad (5)$$

式(5)に式(4)を代入して次式の関係が求められる。

$$\begin{aligned} \Im(C_l) &= -\frac{2}{N} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \sum_{m=1}^{N/2-1} \cos \left(\frac{2\pi km}{N} \right) \sin \left(\frac{2\pi lm}{N} \right) \cdot \Re(C_k) \\ &= \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \beta_{lk} \cdot \Re(C_k) \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、

$$\beta_{lk} = -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^{N/2-1} \cos \left(\frac{2\pi km}{N} \right) \sin \left(\frac{2\pi lm}{N} \right) \quad (7)$$

一方、位相角 ϕ_l は $\tan \phi_l = (\text{虚数部}/\text{実数部})$ で定義でき、フーリエ振幅 A_k を用いると実数部と虚数部は $\Re(C_k) = A_k \cos \phi_k$ と $\Im(C_k) = A_k \sin \phi_k$ のように表現されるので、さらに A_k の対称性を利用すると、

$$\begin{aligned} A_l \cdot \sin \phi_l &= \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \beta_{lk} \cdot A_k \cos \phi_k \\ &= 2 \sum_{k=1}^{N/2-1} \beta_{lk} \cdot A_k \cos \phi_k + \beta_{l,N/2} \cdot A_{N/2} \cos \phi_{N/2} \end{aligned} \quad (8)$$

を得る。ただし、 $A_0 = 0$ (時系列信号にDC成分がないことを意味している)と仮定する。これは、 A_k に関する同次形の方程式であるので $A_1 = 1.0$ とすることにより、式(8)より A_k/A_1 の値が決定できる。以上に述べてきたことから、因果性を有する時系列では、フーリエ振幅の相対的な大きさが位相スペクトルから決定できることが分る。振幅が決定できれば位相は与えられているので、時系列が再現できることになる。 $A_1 = 1.0$ の仮定があるので、この時系列の振幅の大きさには任意性がある。これは、位相スペクトルは虚数部と実数部の比で定義されるので、位相スペクトルから取り出せる振幅の情報は相対的

なものにならざるを得ないためである。

3. 提案する手法の妥当性の検証

展開した手法の妥当性を検証するために、1995年兵庫県南部地震の際に神戸気象台で観測された加速度記録をその位相スペクトルから再現したのが図1である。

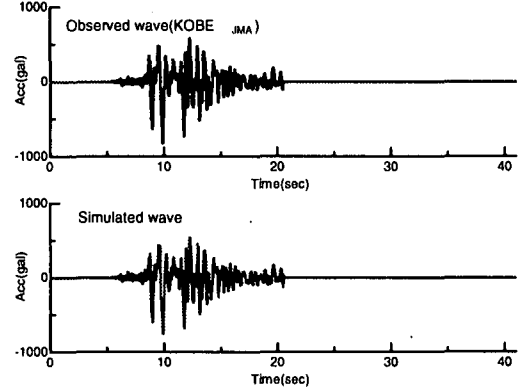


図1 観測記録と位相スペクトルから再現された時刻暦との比較

両者は完全に一致する。理論展開のときに述べたように、位相スペクトルから決定される振幅スペクトルの大きさは相対的なものであるので、図1の再現された時系列は最大振幅が観測地に合うように調整されている。

4. 位相のモデル化と地震動の模擬

因果性を有する時系列では、位相スペクトルから振幅スペクトルを規定できるので、位相スペクトルを適切にモデル化することによって、地震動の非定常性を表現できる。ここでは、次式で定義される群遅延時間を利用することにより、位相スペクトルのモデル化を行う。

$$t_{gr} = \frac{d\phi}{d\omega} \quad (9)$$

群遅延時間 t_{gr} は円振動数 ω の関数になっているので、離散化された円振動数 ω_k における t_{gr} の期待値と標準偏差を $\mu_{igr,k}$ と $\sigma_{igr,k}$ とすれば、群遅延時間の特性が規定できることになる。図2は群遅延時間の期待値が円振動数のサイン関数として与えられ、標準偏差がゼロの場合を対象として、群遅延時間を積分し位相スペクトルを求め、それを用いて時刻暦を計算したものである。図の左側は模擬された時刻暦である。図の右側に設定した群遅延時間と、模擬さ

れた時刻暦から求められた群遅延時間が比較されている。両者はほぼ一致しているが、部分的に一致しない点が低振動数と高同振動数側に見られる。これらの点は位相から計算された振幅の値が極端に小さくなる点であり、群遅延時間を模擬された時刻暦から計算する際の数値誤差に基づいて発生していると考えられる。

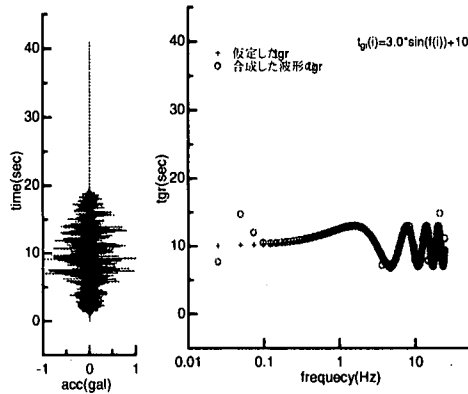


図2 群遅延時間がサイン的な変動をするときの時刻暦とそれから計算された群遅延時間

著者らは既に、多くの地震記録を用いて群遅延時間の期待値および標準偏差をマグニチュード M と震央距離 Δ を用いてモデル化した⁶⁾ この研究では、地震動を、バンドパスフィルターによって、次式のように複数の周波数帯域の時系列に分け、

$$A(\omega)e^{i\phi(\omega)} = \sum_{l=1}^M A_l e^{i\phi_l(\omega)} \quad (10)$$

帯域ごとに群遅延時間を求め、帯域内の群遅延時間の平均値と標準偏差を計算しそれらを周波数帯域中央での群遅延時間の期待値と標準偏差とした。図3は、群遅延時間の期待値と標準偏差を地震のマグニチュードと震央距離の関数とした回帰式から求めた結果の一例を示したものである。この図を求めるときのフィルターとしてはMayerのウェーブレット⁷⁾を利用した。

これらの成果を用いれば離散点ごとのサンプル群遅延時間 $t_{gr,k}$ ($k = 0, 1, \dots, N/2$) を発生できる。そのためには群遅延時間の確率分布特が与えられなければならない。図4は (Hz-Hz) の振動数帯域における群遅延時間の分布特性を示したものである⁶⁾。図から明らかなように群遅延時間はガウス分布より t -分布に近い特性を有していることが分かる。

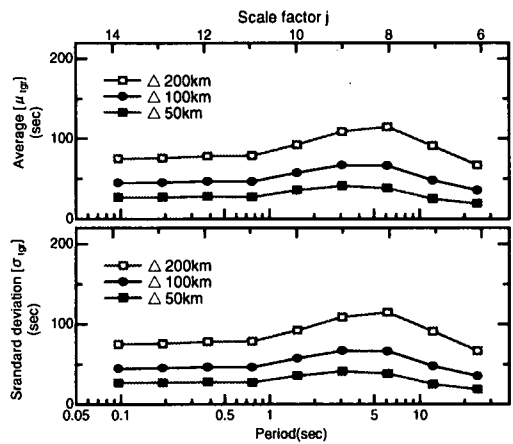


図3 群遅延時間の期待値と標準偏差の振動数依と震央距離依存性 (マグニチュード8の地震を対象)

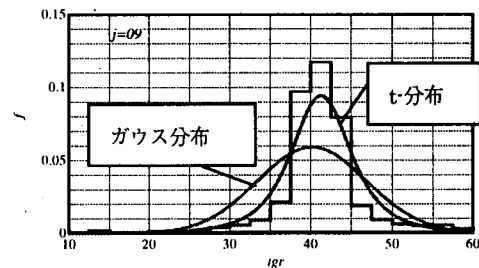


図4 群遅延時間の分布特性

マグニチュード7で震央距離5Kmと20Kmの地震を対象として、図3に示すように群遅延時間の期待値と標準偏差を円振動数の関数として表示し、群遅延時間の確率特性が振動数の離散点ごとに独立な t -分布に従うと仮定して、サンプル群遅延時間を生成して、それを積分することによって求めた位相スペクトルから、地震動を模擬した例を図5に示した。

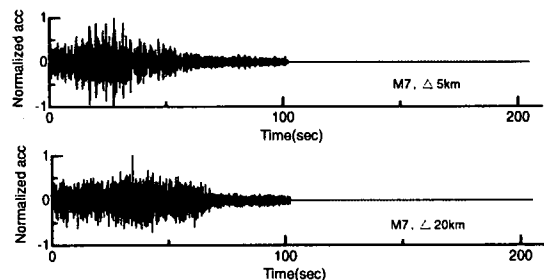


図5 サンプル群遅延時間から模擬された地震動の例

図5の時刻暦の振幅は最大値が1.0になるように正規化されている。これは位相スペクトルのみから時刻暦の絶対振幅を決定することが出来ないためである。また、模擬された波形はM7クラスの震源近

傍の地震動としての特性が十分表現されているものとはなっていない。これは、群遅延時間のモデル化に際して、震央距離の距離の短いところの信頼性が低いことが原因の一つであるが、主な原因は群遅延時間が円振動数軸に沿って独立と仮定したことに起因している。

群遅延時間の振動数軸に沿う相関性を表現するためには、群遅延時間の同時確率密度関数 $p(\mathbf{t})$ が定義されなければならない。それがガウス分布に従うと過程すれば次式のように表現される。

$$p(\mathbf{t}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{N/2} |\mathbf{M}|} \exp\left\{-\frac{1}{2} (\mathbf{t} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{M} (\mathbf{t} - \boldsymbol{\mu})\right\} \quad (10)$$

ここに、

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1,N/2}\sigma_1\sigma_{N/2} \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2,N/2}\sigma_2\sigma_{N/2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N/2,1}\sigma_{N/2}\sigma_1 & \rho_{N/2,2}\sigma_{N/2}\sigma_2 & \cdots & \sigma_{N/2}^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_{gr,1} \\ t_{gr,2} \\ \vdots \\ t_{gr,N/2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{igr,1} \\ \mu_{igr,2} \\ \vdots \\ \mu_{igr,N/2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

また、 ρ_{jk} は相関係数、 j および k は周波数の離散点である。実地震波の ρ_{jk} がどの程度の値になるかは、今後検討する余地があるが、式(10)の多次元過程でサンプル群遅延時間を生成すれば相関性のある群遅延時間が得られる。

5. 重合時系列の合成法

複数の時系列信号の和からなるような時系列を模擬する場合を考える。例えば、実体波と表面波からなるような地震波 $f(t)$ は

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad (11)$$

と表せる。ここに $f_1(t)$ は実体波、 $f_2(t)$ は表面波に相当する。とこのとき、 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ の群遅延時間の期待値と標準偏差のそれぞれに添字 1, 2 をつければ、図6に示すように群遅延時間の分布特性が表現できる。この図の添字 1 の曲線から $f_1(t)$ に対する群遅延時間が模擬できて位相 ϕ が決定されるので、開発した方法により $f_1(t)$ が合成される。同様に、 $f_2(t)$ も添字 2 の曲線から合成することができる。

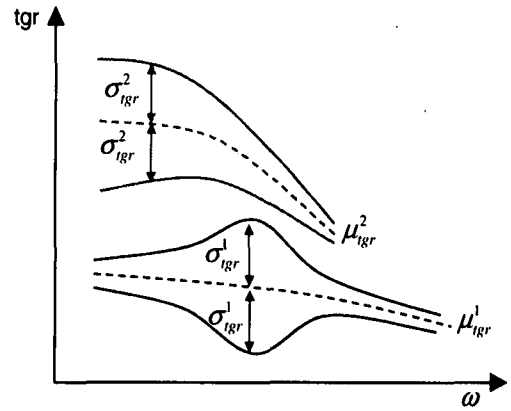


図6 群遅延時間の分布例

6. まとめ

群遅延時間の概念を用いて地震動の位相スペクトルをモデル化し、モデル化された位相スペクトルから非定常地震動を模擬する方法論を展開した。本文中にも述べたが、模擬された地震動の絶対振幅を決定するためには、地震動のパワーに関する情報が必要になる。パワーが与えられれば絶対振幅の大きさはパーセバルの関係式から決定できるので、パワーの距離減衰式についても既に検討を加えた。今後の課題は、振動数軸上で相関性を有する群遅延時間のサンプルを発生させるアルゴリズムを開発することである。

参考文献

- 1) 後藤尚男, 亀田弘行, 杉戸真太, : 非定常強震地震動の統計的予測モデル, 土木学会論文報告集, 第 286 号, pp.37-51, 1979.
- 2) 大崎順彦, 岩崎良二, 大川出, 雅尾享: 地震波の位相特性とその応用に関する研究, 第 5 回日本地震工学シンポジウム, pp.201-208, 1978.
- 3) 和泉正哲, 勝倉裕: 地震動の位相情報に関する基礎的研究, 日本建築学会構造系論文集, 第 327 号, pp.20-26, 1983.
- 4) 石井 透, 渡辺孝英: 地震動の位相特性と地震のマグニチュード・震源距離・深さの関係, 日本建築学会学術講演会梗概集, pp.385-386, 1987.
- 5) 佐藤智美, 植竹富一, 菅原良次: 群遅延時間を用いた長周期地震動の経験的経時特性モデルに関する研究, 日本建築学会構造系論文集, 第 493 号, pp.31-39, 1997.
- 6) 佐藤忠信・室野剛隆・西村昭彦: 観測波を用いた地震動の位相スペクトルのモデル化, 土木学会論文集 No.640/I-50, pp.119-130, 2000.
- 7) Meyer, Y.: Orthonormal Wavelets in Wavelets, Springer, pp.21-27, 1989.