

# 地表地震断層シミュレーションのための 弾塑性確率有限要素法の構築とその適用

中川 英則<sup>1</sup>・堀 宗朗<sup>2</sup>・Maciej ANDERS<sup>3</sup>

<sup>1</sup>学生会員, 工修, 東京大学大学院社会基盤工学専攻 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

<sup>2</sup>正会員, Ph.D., 東京大学大学院助教授, 東京大学地震研究所 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

<sup>3</sup>Ph.D., 東京大学大学院社会基盤工学専攻修了

本研究では, 堆積層内の断層進展挙動を推定するため, 新しい定式化に基づく弾塑性確率有限要素法を用いた数値シミュレーションを行っている. この定式化では, 確率空間と物理空間の双方において関数展開を施すKL展開と呼ばれる方法と, それに基づいて構成されるPC展開と呼ばれる方法とを軸としている. これらの展開によって, 確率的に支配的となる応答を見つけることが可能となる. この結果, 非線形解析に関わる特殊な工夫をすることなく, またモンテカルロシミュレーションに比べ遥かに効率的に応答の確率特性 (平均・分散・確率密度関数) を求めることができる. 地表地震断層を, 硬い岩盤の上に軟らかい未固結被覆層が乗った確率的に材料物性がばらつくモデルとして扱い, ここに本手法を用いることで地表面に生ずる雁行状の歪分布を上手く再現している.

**Key Words :** Surface Fault, Stochastic Finite Element Method, KL Expansion, Polynomial Chaos

## 1. はじめに

従来, 地震工学では, 地表地震断層はあまり考慮されていなかった. しかし, トルコ・イズミット地震, 台湾・集集地震<sup>1)</sup>を契機として, 地震断層が地表に達し大きな変位が生じた際, 付近の構造物に与える被害の可能性を検討することが余儀なくされている. 構造物の巨大化と長大化が進み我が国には, 活断層が1500本以上もあり, 断層を意識した構造物設計も必要かもしれない<sup>2),3)</sup>. このため, 断層が堆積層内をどのように進展し, 地表面のどこにどの程度の変位を引起すかを合理的に予測することがまず必要となろう.

地表地震断層発生の基本的メカニズムは, 地震によって硬い基盤がずれ, その上に乗る地表付近の軟らかい未固結被覆層が破壊する現象として捉えることができる. 軟らかい未固結被覆層内では破壊が途中で停止してしまい, 破壊が地表にまで達することは少なく, しかも, 地表の現れ方に大きなばらつきがあることが特徴である. さらに, 基盤が一様に横ずれをしても, 地表には雁行状の断層が発生し, 未固結被覆層内で複雑な分岐現象が起こっていることが指摘されている<sup>4),5)</sup>. 堆積層の構造・物性が不確かであり, また, 挙動にばらつきが大きいことを考慮すると, 未固結被覆層には決定論的なモデルではなく, 確率論的なモデル化が必要である. また, 地盤のもつ非弾性的な性質に起因した分岐現象の取り扱いが必要となる<sup>6),7)</sup>.

## 2. 弾塑性確率有限要素解析の概要

そこで本研究では, 地盤構造や材料特性の不確かさを確率的なばらつきとして捉え, それによって生ずる地表面での変位や歪の確率的な分布を表現することを目的に, KL, PC展開と呼ばれる2種類の固有関数展開を使った弾塑性確率有限要素法を提案している.

これは, 弾塑性体では, 弾性除荷と塑性荷重が場所ごとに異なって生じることが分岐を起こす原因であることから, 材料特性のばらつきを考慮することで弾性除荷と塑性荷重が確率的に連続的に変動しながら起こることになるため, 繰返し計算に含まれる数値誤差によって最も不安定な解に到達することが期待されるためである. また, KL, PC展開はモンテカルロシミュレーションに比べ遥かに効率的に応答の確率特性 (平均・分散・確率密度関数) を求めることができる手法であるためである.

## 3. KL・PC展開に基づく弾塑性確率有限要素法の概要<sup>8)</sup>

地盤を材料物性が確率的にばらつく弾塑性体としてモデル化し, このモデルを解析する確率有限要素法の手順を示す. これは, 1) 簡単な弾性挙動のみを扱い確率過程の取り扱いを定式化, 2) 増分形式で弾塑性挙動の定式化, 3) 有限要素法に組み込むための離散化の定式化である.

### (1) 確率過程の展開<sup>9),10)</sup>

地盤の弾性特性が確率的に変動する場合、弾性応答も確率的に変動する。弾性特性や弾性応答を場所と確率に依存する確率過程として考えた場合、この確率過程を場所に関する関数と確率変数との積の和として表すことができるというのが、本手法の根幹となるKL(Karhunen-Loeve)展開とPC(Polynomial Chaos)展開である。

最初にKL展開の概略を説明する。弾性係数 $E$ を平均 $\langle E \rangle$ とそこからの変動に分けて表すと以下のように書ける。

$$E(\mathbf{x}, \omega) = \langle E \rangle (1 + \alpha(\mathbf{x}, \omega)) \quad (1)$$

ここに、 $x$ は場所を、 $\omega$ は一つの確率事象を表す。

この時、変動 $\alpha$ は、次のようにKL展開される。

$$\alpha(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_m} \phi_m(\mathbf{x}) \xi_m(\omega) \quad (2)$$

ここに、1) $\phi_m$ は $\alpha$ の共分散マトリクスの固有関数、2) $\xi_m$ は $\phi_m$ に対応した確率空間における固有関数、3) $\lambda_m$ は両者に対応した展開係数である。式(2)から明らかなように、連続的な関数 $\alpha$ を既知の関数 $\{\phi_m\}$ と $\{\xi_m\}$ とによって離散的に表現することができる。

式(2)に現れた確率変数の関数 $\xi_m$ は、確率空間での基底とはなっていない。しかし、この関数 $\xi_m$ の多項式から確率空間の基底を構成することができる。これが、PC展開である。例えば、変位 $\mathbf{u}$ は次のように展開される。

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) &= \Delta \mu_0 \Gamma_0 + \sum_{n_1=1}^{\infty} \Delta \mu_{n_1} \Gamma_1(\xi_{n_1}(\omega)) \quad (3) \\ &+ \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \Delta \mu_{n_1 n_2} \Gamma_2(\xi_{n_1}(\omega), \xi_{n_2}(\omega)) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(\omega) \Delta \mathbf{u}_n \quad (4) \end{aligned}$$

ここで、 $\{\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots\}$ は関数 $\exp[-\frac{1}{2}x^2]$ を $x$ に関して展開して得られる多項式であり、PC(Polynomial Chaos)と呼ばれる。通常、 $\xi_m$ は正規分布に対応した確率変数となるが、この $\Gamma_n$ は正規分布以外の確率変数をも表すことができる。

### (2) 確率的なばらつきをもつ弾塑性体への適用

KL展開とPC展開は、線形問題には有効であるが、材料物性が確率的にばらつく弾塑性体に直接適用することは難しい。そこで、増分形式による線形化と同様に、材料物性のばらつきが小さい場合、平均的挙動で応答のばらつきを摂動展開し、その結果得られた増分形式の問題を確率空間でも線形化することをはかる。具

体的な対象は次の、変位増分 $\Delta \mathbf{u}$ の支配方程式である。

$$\nabla \cdot [\mathbf{C}^{ep}(\mathbf{x}, \omega) : (\nabla \otimes \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega))] = 0 \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{C}^{ep}$ は弾塑性係数であり、材料特性の確率的な変動はここに現れる。関連流れ則を用いると、 $\mathbf{C}^{ep}$ は応力の関数である降伏関数 $f$ によって決定される。材料特性自体が確率的に変動する他に、応答である応力自体も確率的に変動してくるため、この降伏関数を確率的に厳密に取り扱うことは困難となる。そこで、次のような平均回りでの摂動展開を施すことによって、降伏関数の挙動を近似する。

$$f(\sigma(\mathbf{x}, \omega)) \simeq f(\langle \sigma \rangle(\mathbf{x})) + \dots \quad (6)$$

さてここで、 $f(\langle \sigma \rangle)$ に現れる応力の平均 $\langle \sigma \rangle$ を求めるには、応力の確率的な変動を事前に知らなければならない。そこで、平均 $\langle \sigma \rangle$ を求める代わりに、上下限体理論<sup>11)</sup>に基づいて平均を挟むような上下限解を計算する。線形弾性体の場合、上下限体を与える確定的な値は、

$$\mathbf{C}^+ = (\langle \mathbf{C}^{-1} \rangle)^{-1}, \quad \mathbf{C}^- = \langle \mathbf{C} \rangle \quad (7)$$

となる。式(7)を確率的に変動する弾塑性係数に適用した場合、変動が小さい場合に、確率的な弾塑性体の上下限体を与えることが知られている。

### (3) 有限要素法への組み込み

本論分では、弾性係数 $E$ のみが確率的に変動する場合を考える。非線形有限要素法の定式化<sup>12),13),14)</sup>に基づき、式(5)を離散化すると以下のように書ける。

$$[{}^{j-1}\mathbf{K}_i](\omega) [{}^j\Delta \mathbf{U}_i] = [\mathbf{F}_i^{ext}] - [\langle {}^{j-1}\mathbf{F}_i^{int} \rangle] \quad (8)$$

ここに、 $[\mathbf{K}]$ は弾塑性係数 $\mathbf{C}^{ep}$ に対応した接線剛性マトリックス、 $[\Delta \mathbf{U}]$ は離散化された変位増分ベクトルである。 $i$ は荷重増分の番号、 $j$ はイタレーションの番号をそれぞれ表している。また、式(8)の右辺は、 $j-1$ 回目イタレーションで求めた内部応力と外力との残差を表す項であり、不釣り合い力と呼ばれる。この不釣り合い力の項がゼロになるまで繰返し計算を行う。式(8)では、実際の数値計算上の容易さのため $[{}^{j-1}\mathbf{F}_i^{int}](\omega)$ の平均を取ることで右辺を確定的な量にしている。

さて、上下限体と応力平均を使った近似のため、 $[\mathbf{K}]$ は確率的に変動する $E$ と平均 $\langle \sigma \rangle$ から決定される確定部分の積となる。したがって、 $[\mathbf{K}]$ はKL展開することができる。また、このKL展開で使われた $\xi_m$ を用いて $[\Delta \mathbf{U}]$ をPC展開する。すなわち、

$$[{}^{j-1}\mathbf{K}_i](\omega) = \sum_{m=0}^M \xi_m(\omega)^{j-1} \mathbf{K}_m \quad (9)$$

$$[{}^j\Delta \mathbf{U}_i](\omega) = \sum_{n=0}^N \Psi_n(\omega) [{}^j\Delta \mathbf{U}_n] \quad (10)$$

ここに、 $\mathbf{K}_m$  は式 (2) の  $\phi_m$  に対応したマトリクス、 $\Psi_n$  は式 (4) の  $\Delta \mathbf{u}_n$  に対応したベクトルである。

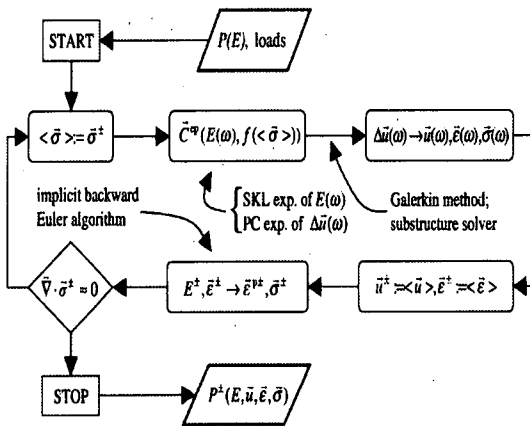
式 (9),(10) を式 (8) に代入し、 $\Psi_k$  の正規直交性に基づいたガラキン法を適用することで、最終的に次のマトリクス方程式が導かれる。

$$\sum_{n=0}^N \left( \sum_{m=0}^M \langle \xi_m \Psi_n \Psi_k \rangle \right) [{}^j \Delta \mathbf{u}_n]_i = \langle [{}^j \Delta \mathbf{F}_i] \Psi_k \rangle \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (11)$$

$$[{}^j \Delta \mathbf{F}_i] = [\mathbf{F}_i^{ext}] (\omega) - \langle [{}^j \mathbf{F}_i^{int}] \rangle \quad (12)$$

弾塑性体では、弾性除荷と塑性載荷が場所ごとに異なって起こることが、分岐現象を起こす原因となっている。通常の弾塑性有限要素法では、弾塑性係数が除荷によって不連続に変化する場合、その挙動を追いながら最も不安定な解を見つけることは極めて難しい。そのため、分岐現象特有の雁行状ひずみ分布を再現することは困難となる。材料物性にばらつきを考慮すると、弾性除荷と塑性載荷は確率的に変動しながら起こることになるため、弾塑性係数も確率的には滑らかに変化することになる。このため、通常非線形問題の解法に用いられるニュートンラプソン法などの繰返し計算を用いることで、計算中に生じる誤差によって最も不安定な解に自然に到達することが可能となった。

図 1. 弾塑性確率有限要素法のフローチャート



#### 4. 数値シミュレーション概要

上述した弾塑性確率有限要素法を、硬い岩盤の上に軟らかい未固結被覆層が乗った横ずれ断層型のモデル (図 2.) に適用してみた。モデルのサイズは、 $(D_x, D_y, D_z) = (140, 40, 40)$  [m] である。y 方向に対する周期境界条件を設定し、モデル底面に中央をすべり線として、左右逆方向に同じ大きさの変位荷重を境界条件として与えた。その際の、荷重ステップを表 1. に示す。モデルの側面と上面は、自由境界としている。要素メッシュはバイアスなものを用い、変形が局所化するモデル中央付近を、断層破壊に伴うエネルギーの消散

率から求めたメッシュサイズによって周辺部よりも細かく分割した。地盤の物性は表 2. に示す通りであり、弾塑性構成則としては、Drucker-Prager モデル<sup>15),16)</sup>を採用した。

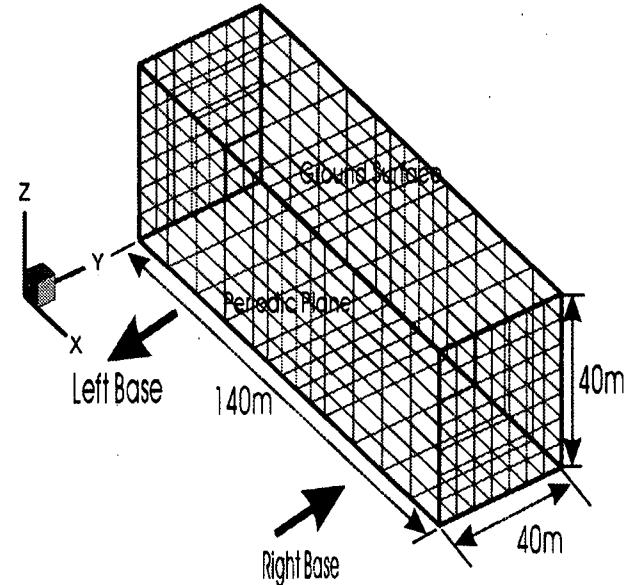
表 1. 変位荷重ステップ

| Load No. | Left Slip(m) | Right Slip(m) |
|----------|--------------|---------------|
| 1        | -2.5E-3      | 2.5E-3        |
| 2        | -2.5E-3      | 2.5E-3        |
| 3        | -2.5E-3      | 2.5E-3        |
| 4        | -2.5E-3      | 2.5E-3        |

表 2. モデルの物性値・境界条件

|                   |                          |
|-------------------|--------------------------|
| 平均弾性係数            | 200[GPa]                 |
| ポアソン比             | 0.1667                   |
| 一軸引張り強度 ( $f_t$ ) | 2.0[tf/m <sup>2</sup> ]  |
| 一軸圧縮強度 ( $f_c$ )  | 20.0[tf/m <sup>2</sup> ] |
| エネルギー消散率          | 0.06E-3[MN/m]            |
| 変動係数              | 0.1                      |
| 相関距離              | 1.0[m]                   |
| 確率分布              | 正規分布                     |
| right base        | 表 1. の荷重ステップで動かす         |
| left base         | 表 1. の荷重ステップで動かす         |
| periodic plane    | 変位境界条件に 5.0 % の乱れを含む     |

図 2. 有限要素解析モデル

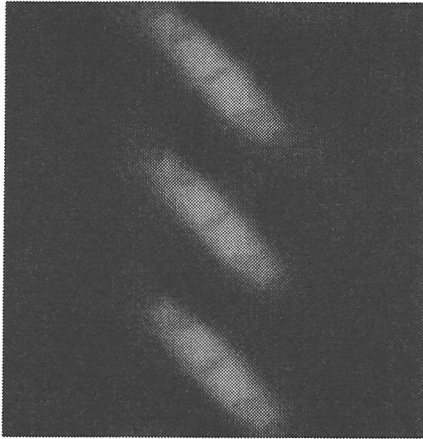


#### 5. 数値シミュレーション結果

数値シミュレーションによって得られた、地表面における平均せん断歪分布を図 3. に示す。これは、表 1. に示す変位荷重ステップの番号が 4 になったときに、図

2. に示すモデルの上面(地表面)で得られたy方向の平均せん断歪分布である。y方向(図3.では縦方向)に周期性をもつ、雁行状の分布が再現されている。基盤におけるすべり線の真上に、せん断歪が局所化して現れていることが分かる。

図3. 地表面に現れた雁行状の平均せん断歪分布



## 6. 結論

本論文では、断層を非弾性的な塑性変形が集中する部分とみなし、弾塑性確率有限要素法を材料物性が確率的にばらつく3次元弾塑性体に用いることで、地表面に生ずる雁行状歪分布を再現した。基盤におけるすべり線の直上に、せん断歪が集中して現れており、そこから離れるに従い緩やかに地盤が変形している様子が見て取れる。これは、材料物性に確率的なばらつきを与えたことで、除荷による弾塑性係数の不連続な変化を追いながら、最も不安定な解を見つけることができるようになったことによる。このように、本研究で開発している弾塑性確率有限要素法によって、地表面地震断層における雁行状亀裂の発生・進展に関するシミュレーションの最低限の壁がやっとクリアーできるような状態になったといえる。

今後は、本手法をさらに改良し地表地震断層問題に適用することで、地下深部の硬い岩盤上に乗っている軟らかい未固結被覆層の厚さと地表断層変位の関係、断層のずれ方向の違いによる地表断層変位量の変化、地表の変形特性、地震の規模と地表面に現れる断層変位の関係などを定量的に評価することによって、構造物の破壊形態の制御や、波及的災害の軽減策を検討・実施するための、断層発生 of 合理的予測に迫ってゆきたい。

## 7. 謝辞

本研究のために、東京大学地震研究所地震予知センターの計算機システムを利用しました。

### 参考文献

- 1) <http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/topics/turkey/>  
<http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/topics/taiwan/>  
<http://wwwsoc.nacsis.ac.jp/ssj/naifuru/>
- 2) 栗田・水野・杉山他：1995年兵庫県南部地震に伴って出現した地震断層，地質ニュース，486., 16～20, (1995).
- 3) 原田・岡村・露川：1995年兵庫県南部地震に伴う野島地震断層調査，応用地質，vol.36, 51～61, (1995).
- 4) 谷和夫，上田圭一，阿部信太郎，仲田洋文，林泰幸：野島地震断層で観察された未固結な表層地盤の変形構造，土木学会論文集，No568, pp.21～39, (1997).
- 5) 谷山尚，渡辺啓行：逆断層運動に伴う砂質表層地盤の変形に関する研究，土木学会論文集，No591, pp.313～325, (1998).
- 6) 鬼塚信弘，伯野元彦，岩下和義，鈴木崇伸：基盤の逆断層変位に伴う地盤の変形と応力について，土木学会応用力学論文集，Vol.2, pp.533～542, (1999).
- 7) 鬼塚信弘，伯野元彦，堀宗朗，岩下和義，鈴木崇伸：逆断層運動に伴う地盤の変形と応力について，土木学会応用力学論文集，Vol.3, pp.577～584, (2000).
- 8) M.Anders and M.Hori：Stochastic finite element method for elast-plastic body, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 46, 1897-1916, (1999).
- 9) 小倉久直，物理・工学のための確率過程論，コロナ社.
- 10) R.G. Ghanem and P.D.Spanos, *Stochastic finite elements: a spectral approach*, Springer, Berlin (1991).
- 11) M.Hori and S.Munashinge: Generalized Hashin-Shtrikman variational principle for boundary-value problem of linear and non-linear heterogeneous body, *Mechanics of Materials*, 31, 471-486, (1999).
- 12) 久田俊明・野口裕久，非線形有限要素法の基礎と応用，丸善 (1995).
- 13) *Journal of the JSSTP*, vol.34, no.392, 977-983, (1993-9)
- 14) J.C. Simo and T.J.R. Hughes, *Computational Inelasticity*, Springer (1998).
- 15) 田中・鶴飼他，地盤の三次元弾塑性有限要素解析，丸善 (1996).
- 16) P.H.Freenstra and R.de Borst：A composite plasticity model for concrete, *Int.J.Numer.Meth.Eng.*, Vol.33,707-730 (1996).