

応答変位法による単杭の地震時応答変位

松原勝己¹・安部明夫¹・本田国保¹・嶋田昌義²・弘重智彦²

¹正会員 東電設計(株)技術開発本部(〒110-0015 東京都台東区東上野3-3-3)

²正会員 東京電力(株)電力技術研究所(〒230-8510 神奈川県横須賀市鶴見区江ヶ崎町4-1)

杭基礎構造物に対する簡易な地震時変位評価法を提案するため、均質な地盤中の単杭を対象として、杭・地盤系を弾性床上の梁としてモデル化し、応答変位法に基づく地震時変位の解析解を誘導した。その際、杭頭の境界条件として回転をフリーとする場合と回転を固定する場合を考慮した。その結果、杭頭変位が杭の特性値 βL (L :杭長)、無次元化重量 $W/(\gamma L^3)$ (W :上部工重量、 γ :地盤の単位体積重量)、地盤バネ定数の地盤せん断弾性係数に対する比 δ および地表面地盤変位 u_g に依存することが明らかとなった。さらに、上部工重量や杭の特性値を変化させたパラメトリックスタディを行い、杭の特性値 βL が増大するほど地表面地盤変位に対する杭頭変位の比が増大する傾向が得られた。

Key Words: Simple pile, seismic response, seismic deformation method, analytical solution, seismic primary diagnosis

1. まえがき

杭基礎構造物の耐震性検討は、地盤、杭基礎および上部構造物の動的相互作用を考慮して実施されるのが望ましい。しかしながら、杭の地震時応答を左右する支配的要因を定性的に把握したり、耐震一次診断のための迅速な評価を目的とする場合などでは、簡易な応答評価手法の構築が必要となる。本報では、杭・地盤系を弾性床上の梁としてモデル化し、応答変位法に基づき地震時変位の解析解を誘導した。その結果、杭応答に及ぼす特徴的なパラメータを抽出するとともに、各パラメータを変化させたパラメトリックスタディを実施し、それらパラメータと杭体変位の関係に考察を加えた。

2. 支配方程式と境界条件

図-1に示すように、均質な地盤中の単杭を対象とし、地盤の一次変形モードによる地盤変位と上部工重量 W に起因する慣性力が作用する状態を考慮し、杭・地盤系を弾性床上の梁でモデル化する。

地震荷重により杭体が曲げ変形するとき、杭体変位 $u(x)$ の支配方程式は、地表面地盤変位を u_g として式(1)で表すことができる。

$$EI \cdot \frac{d^4 u}{dx^4} + ku = ku_g \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (1)$$

ここに、 EI : 杭体の曲げ剛性、 k : 杭の深度方向

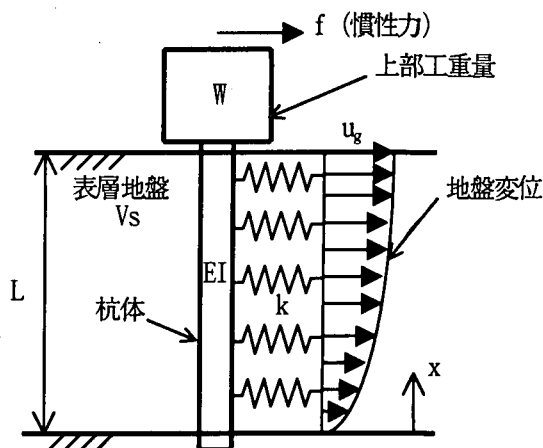


図-1 単杭の解析モデル

単位長さ当たりの地盤バネ定数、 L : 表層地盤厚(杭長)である。

式(1)の一般解は、式(1)の斉次一般解と非斉次特解の和で表され、式(2)のように書ける(付録参照)。

$$u = \exp(\beta x)(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + \exp(-\beta x)(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \alpha u_g \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (2)$$

ここに、

$$\beta = \sqrt{\frac{k}{4EI}}, \quad \alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}\beta L}\right)^4}$$

$C_1 \sim C_4$: 境界条件によって決まる定数

また、杭体の曲げモーメント M 、せん断力 Q および回転角 θ は式(3)で表される。

$$M = -EI \frac{d^2 u}{dx^2}, Q = -EI \frac{d^3 u}{dx^3}, \theta = \frac{du}{dx} \quad (3)$$

さらに、杭頭回転フリーの場合の境界条件として、基盤面上で変位ゼロ、回転角ゼロ、地表面上で曲げモーメントゼロおよびせん断力 f を指定した。ここに、 f は上部工重量 W に起因する慣性力である。すなわち、

$$\begin{aligned} x = 0; u = 0, \frac{du}{dx} = 0 \\ x = L; \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \\ -EI \frac{d^3 u}{dx^3} = f = \frac{\pi^2 V_s^2}{4L^2} \frac{W}{g} u_g \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、慣性力 f は地盤がせん断一次モードで震動していると仮定して定めた。また、 V_s は地盤のせん断波速度であり、 g は重力加速度を示している。なお、杭頭回転固定の場合には、地表面上の回転角をゼロに指定し、 $x=L$ で $du/dx=0$ を考慮すればよい。

3. 係数値の連立方程式とその解

式(4)で示される4つの境界条件と式(2)で示される杭変位の一般解より、係数 $C_1 \sim C_4$ に関する連立方程式が、式(5)で表すことができる。

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0 \\ C_1 + C_2 - C_3 + C_4 &= k_1 u_g \\ -C_1 \exp \kappa \sin \kappa + C_2 \exp \kappa \cos \kappa \\ &+ C_3 \exp(-\kappa) \sin \kappa - C_4 \exp(-\kappa) \cos \kappa = k_2 u_g \quad (5) \\ -C_1 \exp \kappa (\cos \kappa + \sin \kappa) + C_2 \exp \kappa (\cos \kappa - \sin \kappa) \\ &+ C_3 \exp(-\kappa) (\cos \kappa - \sin \kappa) \\ &+ C_4 \exp(-\kappa) (\cos \kappa + \sin \kappa) = k_3 u_g \end{aligned}$$

$$\text{ここに、 } k_1 = -\frac{\pi \alpha}{2 \kappa}, k_2 = \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}\kappa} \right)^2 \alpha, k_3 = -\frac{\pi^2 \kappa}{2 \delta} \mu$$

である。上式において、 $\kappa = \beta L$ 、 $\mu = W/(\gamma L^3)$ と定義し、また、地盤バネ定数 k と地盤のせん断弾性係数 G との線形関係 $k = \delta G$ を仮定し、 $G = \gamma/g \cdot V_s^2$ の関係を用いた。なお、杭頭回転固定の場合には、式(5)の第3式が式(6)となる。

$$\begin{aligned} C_1 \exp \kappa (\cos \kappa - \sin \kappa) + C_2 \exp \kappa (\cos \kappa + \sin \kappa) \\ - C_3 \exp(-\kappa) (\cos \kappa + \sin \kappa) \\ + C_4 \exp(-\kappa) (\cos \kappa - \sin \kappa) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

式(5)および(6)から、係数 $C_1 \sim C_4$ は無次元量 κ 、

μ および δ と地表面地盤変位 u_g により決定されることがわかる。

式(5)を係数 $C_1 \sim C_4$ に関して解けば、式(7)が得られる。

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{u_g}{2(\cosh^2 \kappa + \cos^2 \kappa)} \\ &\times \begin{bmatrix} k_1 \cos^2 \kappa + k_2 (\sinh \kappa \cos \kappa - \cosh \kappa \sin \kappa) \\ -k_3 \cosh \kappa \cos \kappa \end{bmatrix} \\ C_2 &= \frac{u_g}{2(\cosh^2 \kappa + \cos^2 \kappa)} \\ &\times \begin{bmatrix} k_1 \{ \exp(-\kappa) \cosh \kappa + \sin \kappa \cos \kappa \} \\ + k_2 \{ \exp(-\kappa) \cos \kappa + \cosh \kappa (\sin \kappa + \cos \kappa) \} \\ + k_3 \{ \exp(-\kappa) \cos \kappa - \cosh \kappa \sin \kappa \} \end{bmatrix} \quad (7) \\ C_3 &= -C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{u_g}{2(\cosh^2 \kappa + \cos^2 \kappa)} \\ &\times \begin{bmatrix} k_1 \{ \exp \kappa \cosh \kappa - \sin \kappa \cos \kappa \} \\ + k_2 \{ -\exp \kappa \cos \kappa + \cosh \kappa (\sin \kappa - \cos \kappa) \} \\ + k_3 \{ \exp \kappa \cos \kappa + \cosh \kappa \sin \kappa \} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

なお、杭頭回転固定の場合には、係数値 $C_1 \sim C_4$ が式(8)で得られる。

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{u_g}{8(\cosh \kappa \sinh \kappa + \sin \kappa \cos \kappa)} \\ &\times \begin{bmatrix} 2k_1 \{ \exp^2(-\kappa) \cos 2\kappa - 1 \} \\ -k_3 \begin{bmatrix} \exp \kappa (\cos \kappa + \sin \kappa) \\ -\exp(-\kappa) (\cos \kappa - \sin \kappa) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ C_2 &= \frac{u_g}{8(\cosh \kappa \sinh \kappa + \sin \kappa \cos \kappa)} \\ &\times \begin{bmatrix} -2k_1 \{ \cos 2\kappa + \exp^2(-\kappa) \} \\ + k_3 \begin{bmatrix} \exp \kappa (\cos \kappa - \sin \kappa) \\ -\exp(-\kappa) (\cos \kappa - 3 \sin \kappa) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (8) \\ C_3 &= -C_1 \\ C_4 &= \frac{u_g}{8(\cosh \kappa \sinh \kappa + \sin \kappa \cos \kappa)} \\ &\times \begin{bmatrix} 2k_1 \begin{bmatrix} \exp^2 \kappa - 2 \exp^2(-\kappa) \cos 2\kappa \\ + 4 \sin \kappa \cos \kappa + \cos 2\kappa + 2 \end{bmatrix} \\ + k_3 \begin{bmatrix} \exp \kappa (\cos \kappa + 3 \sin \kappa) \\ -\exp(-\kappa) (\cos \kappa + \sin \kappa) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. 杭頭変位に対する解とその考察

式(7)を式(2)に代入し、杭頭変位 u_0 ($x=L$ の位置)を算定すれば、杭頭回転フリーの境界条件に対する解が、式(9)で得られる。また、杭頭回転

固定の場合には、式(10)で表すことができる。

$$\frac{u_0}{u_g} = \frac{1}{\cosh^2 \kappa + \cos^2 \kappa} \times \left\{ \begin{array}{l} k_1 (\sin \kappa \cosh \kappa + \cos \kappa \sinh \kappa) \\ + k_2 (\cosh^2 \kappa - \cos^2 \kappa) \\ + k_3 (\sin \kappa \cos \kappa - \sinh \kappa \cosh \kappa) \\ + \alpha (\cosh^2 \kappa + \cos^2 \kappa) \end{array} \right\} \quad (9)$$

$$\frac{u_0}{u_g} = \frac{1}{2(\cosh \kappa \sinh \kappa + \cos \kappa \sin \kappa)} \times \left\{ \begin{array}{l} (\cosh^2 \kappa + \sinh^2 \kappa) \\ \times (1 + \sin^2 \kappa + 2 \sin \kappa \cos \kappa) \\ - k_1 \exp(-\kappa) \times (\cos \kappa - \sin \kappa) \\ - 2 \cosh \kappa \sinh \kappa \cos \kappa \sin \kappa (\cos \kappa - \sin \kappa) \\ - 2 \cos \kappa \sin \kappa (\cos \kappa + \sin \kappa) \\ - k_3 (\sinh^2 \kappa - \sin^2 \kappa) + 2\alpha (\cosh \kappa \sinh \kappa + \cos \kappa \sin \kappa) \end{array} \right\} \quad (10)$$

式(9)および(10)から、地表面地盤変位 u_g に対する杭頭変位 u_0 の比は、杭の特性値 $\kappa (= \beta L)$ 、無次元化上部工重量 $\mu (= W/(\gamma L^3))$ 、地盤せん断弾性係数に対する地盤バネ定数の比 $\delta (= k/G)$ によって表されることがわかる。

式(9)において、地盤変位を作用させず上部工慣性力のみが作用する場合には、 $\alpha = k_1 = k_2 = 0$ とし、 $k_3 = -\pi^2 V_s^2 W / (8EI \beta^3 L^2 g)$ および $f = \pi^2 V_s^2 W u_g / (4L^2 g)$ を考慮すれば、式(11)を得る。同様に、式(10)から式(12)が得られる。

$$u_0 = \frac{\sinh \kappa \cosh \kappa - \sin \kappa \cos \kappa}{\cosh^2 \kappa + \cos^2 \kappa} \frac{f}{2EI\beta^3} \quad (11)$$

$$u_0 = \frac{\sinh^2 \kappa - \sin^2 \kappa}{\cosh \kappa \sinh \kappa + \cos \kappa \sin \kappa} \frac{f}{4EI\beta^3} \quad (12)$$

上記式(11)および(12)において、特に半無限長の杭を考慮し $\kappa \rightarrow \infty$ とすれば、式(11)および(12)はそれぞれ $u_0 = f/(2EI\beta^3)$ および $u_0 = f/(4EI\beta^3)$ となり設計指針等¹⁾ に示される解と一致することがわかる。

式(9)を用い、 μ をパラメータとした時の u_0/u_g と κ の関係を求めた結果を図-2 に示す。図-2 において $\mu=0$ のケースは杭頭質量を考慮せず地盤変位のみを作用させた場合を、また $\alpha=0$ のケースは地盤変位を作用させず杭頭質量のみを考慮した場合を示している。さらに、地盤変位および杭頭質量の双方を考慮した場合には、基本ケース $\mu=0.00729$ に対し杭頭質量を2倍および1/2倍としたケースを示している。なお、この基本ケースの μ の値は、杭長 $L=19\text{m}$ 、地盤単位体積重量 $\gamma=2.0\text{tf/m}^3$ および上部工重量 $W=100\text{tf}$ に対応してい

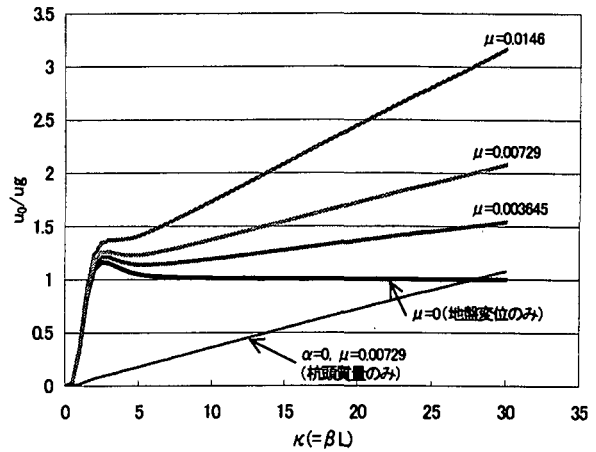


図-2 杭体変位と κ の関係 (杭頭回転フリー)

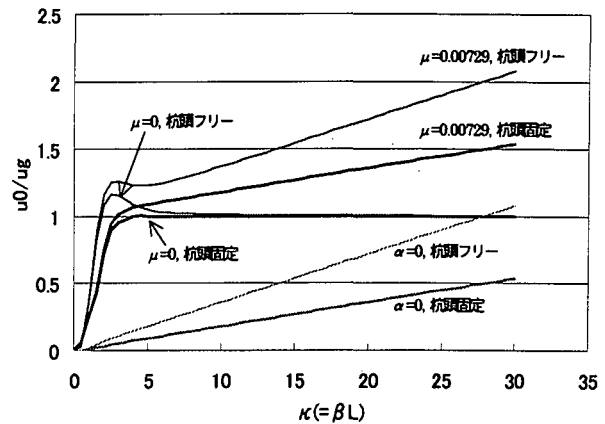


図-3 杭体変位と κ の関係 (杭頭回転固定・フリー)

る。 δ に関しては、せん断波速度 100m/s 相当の地盤を想定し、 $\delta=1.0$ とした。

図-2で地盤変位のみを考慮したケースによれば、 κ が0のとき u_0/u_g が0となり、 κ が大きくなるにつれて u_0/u_g も大きくなるが κ が2.5付近でピークを示し、さらに κ が大きくなると u_0/u_g が1に漸近する傾向が見られる。これは、 κ が杭の曲げ剛性に対する地盤バネ定数の比に関係するパラメータであることから、 κ が小さいとき、すなわち地盤剛性が杭剛性に比べて小さいときには杭体に荷重が作用しなくなり、一方 κ が極めて大きいとき、すなわち地盤剛性が杭剛性に比べて極めて大きいときには地盤変位と杭体変位が等しくなることを示すものと考えられる。また、図-2で杭頭質量のみを考慮したケースによれば、 κ の増大とともに u_0/u_g が単調に増大する傾向が見られる。これは、杭剛性が変わらず地盤剛性が増大した場合には、地盤の固有振動数が大きくなり地盤変位一定のもとで上部工慣性力が増加すること、また地盤剛性が変わらず杭剛性が小さくなった場合には、慣性力一定のもとで杭体変位が増大することによ

ると考えられる。さらに、図-2 で地盤変位と杭頭質量の双方を考慮した場合は、上記の地盤変位のみを考慮および杭頭質量のみを考慮それぞれを足し合わせた結果になることがわかる。

次に、式(10)を用い、杭頭回転固定の境界条件に対する u_0/u_g と κ の関係を求めた結果を図-3 に示す。図-3 には杭頭回転フリーの結果も併せて示した。図-3 によれば、杭頭回転固定の場合においても、杭頭回転フリーの場合と同様の傾向を示すことがわかる。すなわち、地盤変位のみを考慮では κ の増大とともに u_0/u_g が増大し 1 に漸近しており、杭頭質量のみを考慮では κ の増大とともに u_0/u_g が単調に増加している。しかしながら、地盤変位のみを考慮の場合、杭頭回転固定条件ではフリー条件で見られた κ が 2.5 付近での明瞭なピークを示さない。また、杭頭質量のみを考慮の場合、杭頭回転固定条件ではフリー条件の約 1/2 の変位になることもわかる。杭頭境界条件の違いにより u_0/u_g のピークに差異が現れる原因に関しては、今後の検討が必要であるが、杭頭拘束の状態が異なることによる杭体の変形モードの差異が関係していることが考えられる。

5. まとめ

本報での検討内容および検討結果をまとめると以下の通りである。

- (1) 杭基礎構造物の地震時変位に関する簡易評価法構築を目的として、単杭を対象とした杭・地盤系を弾性床上の梁でモデル化し、応答変位法を適用して杭体変位の解析式を求めた。
- (2) 地表面地盤変位に対する杭頭変位の比 u_0/u_g は、杭の特性値 βL 、無次元化上部工重量 $W/(\gamma L^3)$ 、地盤せん断弾性係数に対する地盤バネ定数の比 k/G に依存することが示された。
- (3) 地盤変位のみを考慮した場合、 βL が増大するとともに u_0/u_g が増大し、 βL が非常に大きくなると u_0/u_g が 1 に漸近する。また、杭頭質量のみを考慮した場合、 βL が増大するとともに u_0/u_g が単調に増大する。さらに、地盤変位および杭頭質量の双方を考慮した場合には、地盤変位のみと杭頭質量のみのそれぞれを重ね合わせた結果となる。
- (4) 杭頭境界条件の違いによる傾向的な差異は見られないが、杭頭回転固定の方が杭頭回転フリーに比べて小さい応答変位を示す。

6. あとがき

本報では、杭基礎構造物に対する簡易的な地震時応答変位評価のために、単杭を対象として応答変位法に基づく解析解の誘導を試み、支配パラメータを抽出するとともに、パラメータが杭体変位に及ぼす影響に関して定性的な考察を実施した。今後は、2 層地盤への拡張を実施したいと考えている。

付録 式(1)の一般解

式(A1)が、式(1)の斉次一般解（右辺が 0 の方程式の一般解）であることを示す。

$$u = \exp(\beta x)(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + \exp(-\beta x)(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \quad (A1)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$$

式(A1)の微分形を求める。

$$\frac{du}{dx} = \beta \left[\exp(\beta x) \{ (C_1 + C_2) \cos \beta x + (C_2 - C_1) \sin \beta x \} + \exp(-\beta x) \{ (C_3 - C_4) \cos \beta x - (C_3 + C_4) \sin \beta x \} \right]$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2\beta^2 \left[\exp(\beta x) (C_2 \cos \beta x - C_1 \sin \beta x) + \exp(-\beta x) (-C_4 \cos \beta x + C_3 \sin \beta x) \right]$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = 2\beta^3 \left[\exp(\beta x) \{ (C_2 - C_1) \cos \beta x - (C_1 - C_2) \sin \beta x \} + \exp(-\beta x) \{ (C_3 + C_4) \cos \beta x - (C_3 - C_4) \sin \beta x \} \right]$$

$$\frac{d^4u}{dx^4} = -4\beta^4 \left[\exp(\beta x) (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + \exp(-\beta x) (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \right] \quad (A2)$$

上記式(A2)より、式(A1)が式(1)の斉次一般解であることが示された。次に、式(1)の非斉次特解を求める。式(A3)の特解を仮定する。

$$u = \alpha u_g \sin \frac{\pi x}{2L} \quad (A3)$$

式(A3)より式(A4)が得られるから、式(1)より式(A5)が成立する。

$$\frac{d^4u}{dx^4} = \left(\frac{\pi}{2L} \right)^4 \alpha u_g \sin \frac{\pi x}{2L} \quad (A4)$$

$$EI \left(\frac{\pi}{2L} \right)^4 \alpha + k\alpha = k \quad (A5)$$

式(A5)より式(A6)が得られ、式(1)の特解が得られた。

$$\alpha = \frac{k}{k + EI \left(\frac{\pi}{2L} \right)^4} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}\beta L} \right)^4} \quad (A6)$$

参考文献

- 1) たとえば、日本道路協会：道路橋示方書・同解説 I 共通編 IV 下部構造編，1996