

平板の有限変形理論を用いた鋼製橋脚の安定解析

大越 靖広*, 川原 睦人**

*中央大学大学院理工学研究科 (〒112 東京都文京区春日1-13-27)

**工博 中央大学教授 理工学部土木工学科 (〒112 東京都文京区春日1-13-27)

橋脚の安定解析を行なう方法として、1. 骨組構造として解析する、2. 橋脚を平板の集合と考へて解析する、の二通りが挙げられる。しかし前者では局部座屈を扱うことが不可能であり、後者では汎用プログラムを用いると、マンホールやダイヤフラムなどの細部まで有限要素分割するには容量の面から制限があった。しかし兵庫県南部地震により、橋脚のマンホール付近に局部的な座屈の現象が見られたことなどから、橋脚の細部まで考慮に入れた解析を行なう必要がある。したがって本研究では平板の有限変形理論を用いて、橋脚の大変形解析はもとより、固有値解析でも細かい有限要素分割を行なって解析することを目標としている。

Key Words : FEM, Finite Deformation Theory, Eigenvalue Problem

1 はじめに

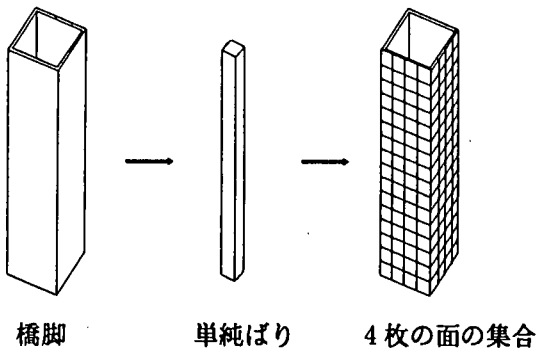


図-1

構造物の安定性を調べることは、その構造物の挙動を調べるうえで大変重要である。1995年に発生した兵庫県南部地震によって土木構造物ならびに各種都市機能が甚大な被害を受けたことは、極めて深刻に受けとめられており、その原因の究明が急がれている。本研究では、橋脚を4枚の平板の集合として考へているので、面内問題と面外問題の合成を考へなければならぬ。また、ある面の面外の曲げはとなりの面の面内の曲げになることから、面内問題についても曲げを考へしなくてはならない。また、平板の解析を行うとき、座屈などを考へる荷重(変位)を伴うと、面内変形と面外変形との間に相互の連成が起こる。よって、本研究では平板の有限変形理論を用いて解析を行っている。ただし、ここで考へる座屈問題としては、面内荷

重を受けて面内変形する平板が、ある限界値に達して面外変形する場合に限定している。

2 板構造の解析

変形が微小である限りは、面内問題と面外問題は切りはなして考へることができる。したがって本研究では、面内問題と面外問題の基礎方程式両方を用いている。また、ある面の面外の曲げはとなりの面の面内の曲げになることから、面内問題についても曲げを考へしなくてはならない。(図-2)そこで、本研究では接点外力として式(1)を考へしている。

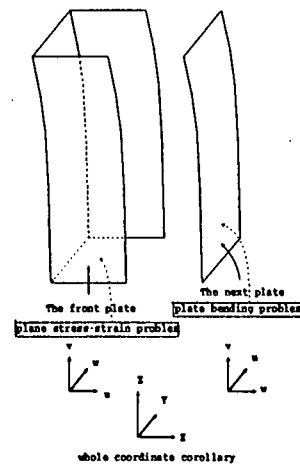


図-2

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1)$$

2.1 面内変形問題（平面問題）

対象とする平板の厚さが薄くて一様な場合（平面応力問題）には、板の内部において、応力成分 $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ が無いと考へても無理がない。このような理想化をすることによって、3次元連続体の一般的な基礎方程式から、2次元問題としての平面応力、平面ひずみの基礎方程式を得ることができる。すなわち、次に示すように6つの応力成分のうち3つだけ（ $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ）を議論することとなる。

2.1.1 基礎方程式

基礎方程式には、以下の式を用いることとする。

<つり合い方程式>

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{Y} = 0 \quad (3)$$

ここで、 \bar{X} および \bar{Y} は単位面積、単位板厚当たりの物体力の x および y 方向の成分である。

<ひずみ、変位関係式>

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6)$$

<応力、ひずみ関係式>

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (7)$$

2.1.2 境界条件

$$u = \bar{u} \quad \text{on} \quad S_1 \quad (8)$$

$$\bar{p}_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m \quad \text{on} \quad S_2 \quad (9)$$

$$\bar{p}_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m \quad \text{on} \quad S_2 \quad (10)$$

ここで、 l および m は周辺外向きの法線 n の方向余弦で、 $l = \cos(n, x)$ 、 $m = \cos(n, y)$ である。

2.1.3 有限要素方程式

求めるべき解は、平面問題の最小ポテンシャルエネルギーの原理の汎関数を最小にするものであるので、有限要素方程式は次のように得ることができる。

$$F = Ku \quad (11)$$

$$K = h \iint P^T DP dx dy \quad (12)$$

P はひずみ、変位行列を表す。またここでは長方形要素を用いているので、要素内の u, v および θ のそれぞれを4つの係数で表される多項式によって次のように補間する。

$$u(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta \quad (13)$$

$$v(\xi, \eta) = \alpha_5 + \alpha_6 \xi + \alpha_7 \eta + \alpha_8 \xi \eta \quad (14)$$

$$\theta(\xi, \eta) = \alpha_9 + \alpha_{10} \xi + \alpha_{11} \eta + \alpha_{12} \xi \eta \quad (15)$$

2.2 面外変形問題（曲げ問題）

板厚 h が他の寸法に比べて十分に小さいこと、板が荷重を受けた場合、中立面は湾曲するが伸縮はなく、変形前に中立面の法線にあった点は、変形後も湾曲した中立面の法線の上にあるというKirchhoff-Loveの仮定に基づいて考える。すなわち板の面に垂直な方向の荷重に対して、板の中立面は板の面外方向のみ変位するものとする。

2.2.1 基礎方程式

面外変形を考える場合、等方性の薄板の曲げに関する支配方程式は、4階の偏微分方程式として次のように表すことができる。

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (16)$$

ここで、 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ であり、 D は板の曲げ剛性を表す。 E, ν および h は板の弾性係数、ポアソン比および板厚を表す。

2.2.2 境界条件

解曲面 $w(x, y)$ を決定するために、平板周辺の境界上に与えられるべき条件には幾何学的境界条件と力学的境界条件とがあるが、ここでは本研究で考慮される幾何学的境界条件についてのみ説明する。境界上の一点を通り、中立面に垂直な線上にある板厚内の全ての点

の動きは、変位および中立面に直交する2方向の勾配によって決まる。したがって、幾何学的境界条件は次の3つで構成される。

$$\omega = \bar{\omega}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial n}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial s} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s} \quad (17)$$

しかしながら境界周辺に沿った方向の連続した部分において変位 w が拘束されると、必然的にその方向の変位 $\frac{\partial w}{\partial s}$ も拘束され、独立には存在しない。したがって、対象とされる条件は次の2つとなる。

$$\omega = \bar{\omega} \quad \text{on} \quad S_1 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial n} \quad \text{on} \quad S_2 \quad (19)$$

ここで、 s, n はそれぞれ境界における接線および法線方向を表している。

2.2.3 有限要素方程式

いま、支配方程式(16)を便宜上次のような形で表す。

$$[S]^T [D] [S] \omega = p \quad (20)$$

ここに、

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$[D] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

である。式(20)に仮想仕事の原理を適用すれば、次式を得る。

$$\iint \omega^* [S]^T [D] [S] \omega dV = \iint \omega^* p dV \quad (22)$$

ここで、 ω^* は、仮想変位を表す。長方形要素を用いているので、要素内の変位 ω を12の係数を有する多項式(23)で補間する。式(22)をその多項式で定義した、局所座標系に変換して整理すると、式(24)のような有限要素方程式が得られる。

$$\omega(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^3 + \alpha_8 \xi^2 \eta + \alpha_9 \xi \eta^2 + \alpha_{10} \eta^3 + \alpha_{11} \xi^3 \eta + \alpha_{12} \xi \eta^3 \quad (23)$$

$$F = Ku \quad (24)$$

ここで、

$$K = \iint P^T D P dx dy \quad (25)$$

であり、 P はひずみ、変位行列を表す。

3 平板の有限変形理論

変形が微小である限りは、面内変形と面外変形との間に相互の連成がないと仮定してきた。しかし座屈を考えると、板のたわみ変形が大きくなるにつれて、板の中央面にも応力を生じ、相互の干渉が起り始める。座屈を支配する厳密な方程式には、面内変形と面外変形との間に複雑な連成が存在するが、ここでは板厚が他の寸法に比べて小さいと仮定して次のように座屈方程式を求める。座屈前の平面応力場の支配方程式 $\delta V_P + \delta W_P = 0$ と座屈変形を支配する仮想仕事方程式 $\delta U - \delta W_P = 0$ が、座屈変形がおこる瞬間同時に成立することから、次の座屈方程式が得られる。

$$\delta V_P + \delta W^{(0)} = 0 \quad (26)$$

ここに δV_P と $\delta W^{(0)}$ を計算して代入すると、次式のような基礎方程式が得られる。

$$D \Delta \Delta w - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (N_x^{(0)} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (N_{xy}^{(0)} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y^{(0)} \frac{\partial w}{\partial y}) \right\} = 0 \quad (27)$$

この場合の初期応力のポテンシャルは次式のようなになる。

$$w^{(0)} = \frac{1}{2} \iint \left\{ N_x^{(0)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy}^{(0)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + N_y^{(0)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \iint \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x^{(0)} & N_{xy}^{(0)} \\ N_{xy}^{(0)} & N_y^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} dx dy$$

$$= \frac{1}{2} a^T K_G a \quad (28)$$

ここに、

$$K_G = \iint G^T N^{(0)} G dx dy \quad (29)$$

であり、 K_G は初期応力行列を表す。

4 リヤプノフの安定理論

本研究ではリヤプノフの安定理論に基づいて、安定解析をおこなっている。有限要素方程式は、3章の有限変形理論を用いて次のように表すことができる。

$$\{F\} = [K + K_G]\{X\} \quad (30)$$

式(30)は次式のようなシステムとして考えることができる。

$$\dot{x} = Ax \quad (31)$$

リヤプノフ関数はエネルギー表現を一般化したものと見なせ、ポテンシャルエネルギーは $x^T P x$ と表される。

$$V(t) = x^T(t)P(t)x(t) \quad (32)$$

式(32)を時間 t で微分すると次式を得る。

$$\dot{V}(t) = x^T(t)[\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t)]x(t) \quad (33)$$

安定性のためには、エネルギーの減少を意味する十分条件として

$$V(t) > 0 \quad \dot{V}(t) < 0 \quad (34)$$

が要求される。次式のように $Q(t)$ を定義する。

$$\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) = -Q(t) \quad (35)$$

ただし、 $Q(t)$ は一般に対称行列でここでは便利のために単位行列 $\times 2$ を示す。ここで式(35)が正定値対称行列 $Q(t)$ に対して、一様有解な正定値解 $P(t)$ を持てば、式(31)のシステムは安定である。ここでは時不変システムを考えるので式(35)は

$$A^T P + P A = -Q \quad (36)$$

という、リヤプノフ代数行列方程式で表すことができる。ここで式(36)に A と Q を与えて P の未知要素数 $n(n+1)/2$ の連立方程式を解く。システムが安定のときは求めた P が正定値であり、すなわち P の固有値はすべて負である。さらにここでは A が対称なので、 P の固有値は A の固有値と完全に一致する。したがって式(30)を直接考えて、もし $K + K_G$ の全ての固有値が負ならば、そのシステムは安定であると言える。もし一つでも正の固有値が存在するならば、そのシステムは不安定ということになる。したがって本研究では、各々の荷重に対する最大の固有値のみ議論することとする。

5 固有値の解法

固有値を求めるべき行列がとても大きい(節点数 $\times 6$)ので二分法などを用いて直接全体を解くことはできない。したがって本研究では *Arnoldi's* 法を用いて固有値を計算している。この計算法を用いると得たい固有値(ここでは最大固有値)の周辺だけを求めることができる。つぎに *Arnoldi's* 法のアルゴリズムを簡単に紹介する。

1. ベクトル v_1 を単位ノルムにし、ステップ数 m (求めたい固有値の数) を決定する。
2. 以下を $j=1$ から m まで繰り返し計算する。

$$\hat{v}_{j+1} = C v_j - \sum_{i=1}^j h_{ij} v_i \quad (37)$$

$$h_{ij} = (C v_j, v_i), i = 1, \dots, j \quad (38)$$

$$h_{j+1,j} = \|\hat{v}_{j+1}\| \quad (39)$$

$$v_{j+1} = \hat{v}_{j+1} / h_{j+1,j} \quad (40)$$

ここで求めた V_m を用いると、ヘッセンベルグ行列と呼ばれる H_m が次のように求まる。 H_m と C には相似性の関係があり、 H_m の固有値は C の固有値、又は C の固有値の一部である。すなわち全ての固有値を求めず、一部だけを計算することが可能である。

$$H_m = V_m^T C V_m \quad (41)$$

このアルゴリズムをそのまま用いると、固有値の実数部分の絶対値が大きい方から求まることになる。しかし、本研究で求めたい最大固有値は 0 付近に存在するので、次にしめすように、式(37)の C には $K + K_G$ の逆行列を用いなければならない。

$$C^{-1} \Phi = \lambda \Phi \quad (42)$$

そこで本研究では、 $K + K_G$ の逆行列を解く際にも Element-by-Element PCG 法を用いて、大規模な計算を行なえるようにしている。

6 数値計算例

6.1 単純ばりとの比較

平板を用いて解析したときの解の信頼性を調べるためにも、その解析で用いた物性値から単純ばりの物性値を求め同条件で比較する。図-3は平板を用いて解析したときの有限要素分割を示している。節点数および要素数はそれぞれ252と240である。板とはりの物性値は次に示すとおりである。

平板

板厚 $h = 0.01(m)$

曲げ剛性 $E = 2.1 \times 10^7(t/m)$

サイズ $1.2 \times 1.2 \times 8.0(m)$

単純ばり

断面積 $A = 0.0239(m^2)$

断面2次モーメント $I = 5.688 \times 10^{-3}(m^4)$

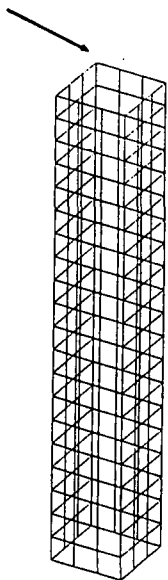


図-3: 有限要素分割

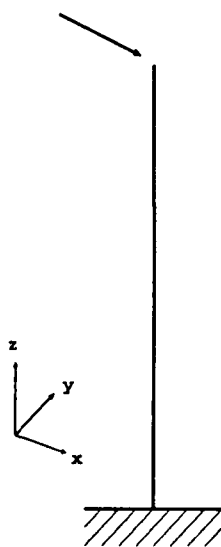


図-4: 単純ばり

まず両方のモデルに上から荷重を与えていく。このとき偏心を上図のように与える。図-5は荷重ごとの固有値の最大値を示している。この図から平板を用いて解析したときの不安定になる荷重(座屈荷重)は、約7000tのときである。また図中の×は単純ばりとして解析したときの座屈荷重を示している。これより平板を用いて解析すると、単純ばりとして解析するのでは20%も差がでるとい結果を得た。このとき平板を用いて解析したときの解の信頼性を確かめるために、座屈前後(7000t, 7050t)の外力を与えた場合の変位を図-6、図-7に示す。

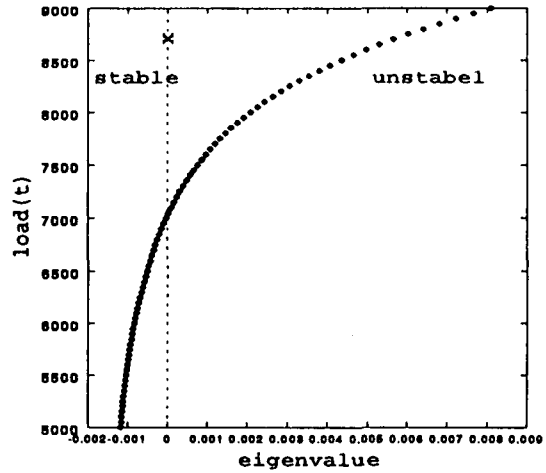


図-5: 固有値

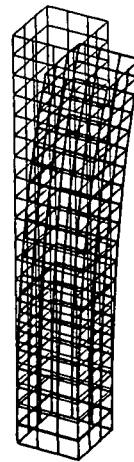


図-6: 変位 (7000t)

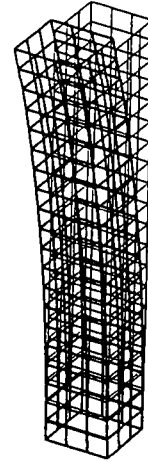


図-7: 変位 (7050t)

図-6においては、偏心をかけた向きと同じ方向に変位がでているが、図-7では反対に変位がでていて計算上も行列が不安定になっていることが分かる。そこで上図の×の点の変位と荷重の関係を次に示す。この結果からも、座屈荷重付近で計算が不安定になっていることが分かる。

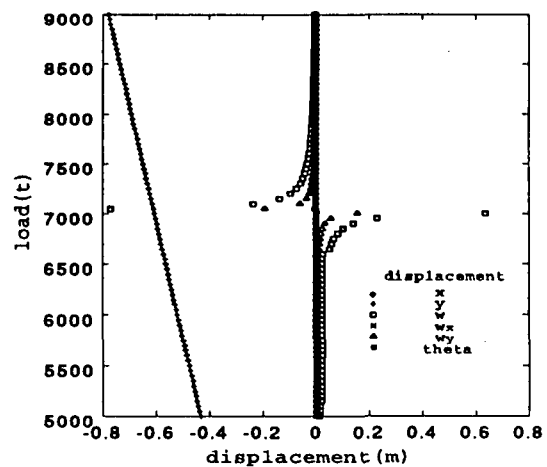


図-8: 変位

6.2 橋脚の細部を再現した解析

先の結果から、5章で示した固有値の解法の妥当性が証明された。したがって、ここでは橋脚の細部まで有限要素分割した解析を行なっている。ダイヤフラムを三ヶ所設けた場合(図-9)とマンホールを設けた場合(図-10)を解析した。節点数および要素数は、図-9、図-10それぞれ12203、12000と10880、10800である。



図-9: ダイヤフラム

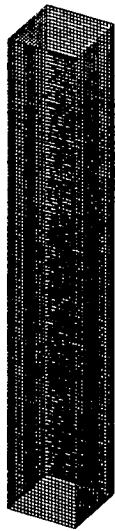


図-10: マンホール

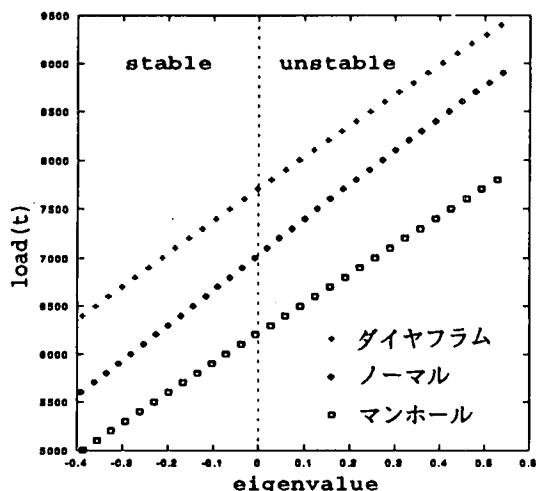


図-11: 固有値

橋脚のサイズは $1.2 \times 1.2 \times 8.1(m)$ である。ダイヤフラムの位置は下から $1.02, 4.02, 7.02(m)$ とし、マンホールは下から $1.97(m)$ のところ $0.72 \times 0.84(m)$ のサイズで設置した。このときの解析結果は図-11に示す。図-11よりダイヤフラムを設けると強度が設けないときにくらべ、約10%上がり、逆にマンホールを設けると強度が約10%下がってしまうことが分かる。これによりダイヤフラムやマンホールの特性はある程度つかめていると考えられる。しかし、ここでは6.1のような変位による裏付を行なっていないが、今後解の信頼性を証明し、精度を上げた解析ができれば、橋脚の細部を再現した解析ができるであろう。

7 おわりに

本研究で提唱したように、固有値計算(Arnoldi's法)にElement-by-Element PCG法の考えを適用することによって、コンピュータの容量という点では有限要素分割の制限を大幅に緩和することができた。これにより、ダイヤフラムやマンホールといった橋脚の細部を考慮しての解析が可能であり、局所的な座屈にも対応できると考えられる。また、単純ばりとの比較で20%もの座屈荷重の差が出たが、今後はここで得られた解の信頼性を確かめ、精度を上げ、実験値などとの比較もする必要があると思われる。

参考文献

1. 吉田 裕、川原 睦人：新体系土木工学 3 有限要素法、技報堂出版、1983
2. 川井 忠彦：座屈問題解析、培風館、1991
3. Peter C.Muller：安定性と行列、Springer-Verlag Tokyo、1989
4. Ding, Y and Kawahara, M : Linear stability of incompressible flow using finite element method, submitted to J.comp.Phys,1997

STABILITY ANALYSIS OF STEEL PILLAR USING FINITE DEFORMATION THEORY OF PLATE

Yasuhiro Ohkoshi and Mutsuto Kawahara

The partial bucklings were happened nearby the manhole of steel pillars by the Hanshin earthquake in the Kobe City. Therefore, in my study, stability analysis of detail of steel pillar is carried out by using finite deformation theory of plate. As for analysis of eigenvalue, the arnoldi's method considered the element-by-element PCG method is used, and the large scale problem is analyzed.