

M- ϕ 曲線の軟化を考慮した橋脚の非線形曲げ振動解析の安定性

大島 俊之*, 三上 修一**, 石川 義樹***

*工博 北見工業大学教授 工学部土木開発工学科 (〒090 北海道北見市公園町 165)

**工博 北見工業大学助教授 工学部土木開発工学科 (〒090 北海道北見市公園町 165)

***工修 八千代エンジニアリング株式会社 (〒153 東京都目黒区中目黒 1-10-21)

M- ϕ 曲線の軟化を考慮した動的応答解析は、解の一意性が無い場合があり系のつり合い状態が不安定となり、一般に増分形の逐次積分を用いた応答計算では解が収束しないことがある。この不安定問題を解決するため系に蓄積されるひずみエネルギーを評価することにより安定なつり合い経路を選択する解析手法を示し、M- ϕ 曲線の軟化を考慮した橋脚の非線形曲げ振動解析及び履歴復元力を数本の直線でモデル化した解析を用いてM- ϕ 曲線の履歴特性、変位応答性状、エネルギー分布について比較検討を行った。

Key Words : Local Buckling, M- ϕ Curve of Softening, Negative Eigen Value, Strain Energy

1. はじめに

1995年1月17日に発生した兵庫県南部地震では、鋼製橋脚に限らず数多くの構造物が破損もしくは崩壊に至り、人命及び社会基盤に与えた被害はかつてないほど甚大なものであった。そして既存の設計方法による構造物の信頼性及び耐震性は大きく失われることとなり、以来強震時における橋脚の挙動に関する実験的、解析的研究が精力的に行われてきた¹⁾。これらの成果は1996年10月に施行された道路橋示方書耐震設計編に取り入れられており、同示方書では従来の震度法や地震時保有水平耐力の照査等の他、設計段階での動的非線形解析による安全照査が新たに付け加えられている。同示方書の改訂に伴う耐震設計の大幅な見直しは、非線形振動解析の重要性をより高める結果となったが、今後の設計実務への応用を考えた場合、解析法の整備は早急の課題となる。

また、同地震は設計荷重を大きく超える地震力であった為、これまでに経験したことのない橋脚の破壊性状が多数現れている。一部の鋼製橋脚では局部座屈を伴う損傷も見られており、この様な現象を考慮した場合、曲げモーメント-曲率曲線(M- ϕ 曲線)は図-1の様に負剛性を有する軟化部が発生する。しかし剛性軟化部では、一つの抵抗曲げモーメントに対し実現可能な曲率は二つ以上存在するため、解の一意性が無く増分形の逐次積分を用いた応答計算では収束しないことが知られている。これは非線形振動論におけるBifurcation Point(分岐点)もしくはSaddle Point(鞍点)と呼ばれる不安定問題である。同様の問題は鋼製橋脚のみならず、ひずみ軟化材料を考慮したRC構造物でも存在し²⁾、この問題を含むモデルの解析は安定性を欠くことから最近問題となっているのが現状であり、また座屈及びシェル問題

等ではポテンシャルエネルギーの安定性を考慮した解析が行われているが、動的解析への応用に関する研究は十分になされていないようである。

そこで本論文では、この不安定問題を一般の構造物の非線形振動解析に対する広義な問題として捉え、M- ϕ 曲線の軟化部において系のつり合い状態に関する安定性を論ずるとともに、構造物の系に蓄積されるひずみエネルギーを評価することにより不安定領域後の応答経路を追跡する解析手法について示す。また局部座屈等の不安定問題を有する鋼製橋脚の動的解析への適用性についても考察する。さらに本論文で提案する解析手法を用いて、実際の橋脚に対しM- ϕ 曲線の軟化を考慮した非線形曲げ振動解析を行い、従来より耐震設計等で行われている履歴復元力を数本の直線でモデル化した解析とのM- ϕ 曲線の履歴特性、応答性状及びエネルギー分布について比較検討を行った。

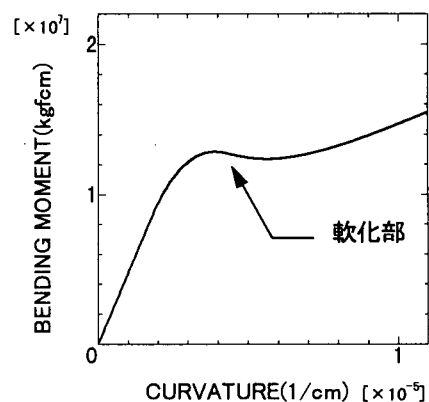


図-1 軟化部を有するM- ϕ 曲線

2. 動的応答解析

2. 1 履歴復元性を持つ構造系の運動方程式

一般に、減衰を含まない非線形な復元力を持つ構造系の運動方程式は、

$$[M]\{\ddot{u}\} + \{R(u)\} = \{P(t)\} \quad \dots(1)$$

と書くことができる。ここで $\{u\}$ は相対変位ベクトル、 $[M]$ は質量マトリックス、 $\{R(u)\}$ は非線形復元力、 $\{P(t)\}$ は外力ベクトルである。また、微小な時間間隔 Δt に対して有効な剛性マトリックスを $[K_e]$ とすると式(1)は増分形で次式のように表すことができる。

$$[M]\{\Delta\ddot{u}\} + [K_e]\{\Delta u\} = \{\Delta P(t)\} \quad \dots(2)$$

解析においては各時刻歴毎に曲げモーメントと曲率の関係から曲げ剛度 $E I$ ($M-\phi$ 曲線の傾きに相当) を求め、剛性マトリックス $[K_e]$ を組む。そして、上式を逐次積分することにより応答計算を行う。

2. 2 エネルギーのつり合い方程式

本解析では地盤を含めて減衰の影響を考慮に入れていないため、外力によって構造系に入力されたエネルギーは全て運動エネルギーとひずみエネルギーに変換される。また、運動エネルギーは非保存エネルギーであるので、最終的にはひずみエネルギーの蓄積によって入力エネルギーの消費がなされる。そしてこの構造物に蓄積されるエネルギーは破壊や損傷の程度を示す重要な指標となる³⁾。そこで、式(2)の各項に $\{\dot{u}\} dt$ を乗じて積分を行うことにより、次式のエネルギーのつり合い式が得られる。

$$\int \{\dot{u}\}^T [M] \{\Delta\ddot{u}\} dt + \int \{\dot{u}\}^T [K_e] \{\Delta u\} dt = \int \{\dot{u}\}^T \{\Delta P(t)\} dt \quad \dots(3)$$

ここで、各項は左辺より運動エネルギー、ひずみエネルギー、右辺は外力からの入力エネルギーをそれぞれ表す。

3. $M-\phi$ 曲線の軟化を考慮した動的解析手法

橋脚を離散質点系はり要素にモデル化した非線形曲げ振動解析では、各はり要素の曲げモーメントと曲率の関係から曲げ剛度を求め、剛性マトリックスを組み非線形復元力を算定して応答計算を行うのが一般的であるが、図-1に示した様に $M-\phi$ 曲線が負勾配となり復元力が軟化する場合には、増分形の逐次積分による応答計算では解が収束せず不可能となる。これは、Bifurcation Point の発生により系が複数のつり合い経路を持ち、解の一意性が失われる為である。この Bifurcation Point は複数の平衡状態への移行を意味する分岐点であり、数学的には系の固有値が零もしくは負となる構造特異点

を形成し、力学的には構造物の挙動が急激に変化する状態に対応するものである。そして複数の負の固有値の発生は、それぞれの固有値と関連した複数の平衡状態が同時に発生することを意味し、系が不安定なつり合い状態を示すこととなる。したがって、この不安定な状態に対してその後の応答の追跡を行う為には、増分形の逐次積分とは別のアプローチが必要となる。そこで系のひずみエネルギーを評価して安定なつり合い経路を選択することにより、軟化領域を突破する解析手法を以下に示す。

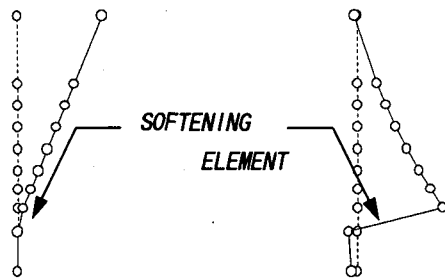
今、ある離散質点系において一部のはり要素が軟化した場合について考える。負の固有値の数から存在するつり合い経路の数を把握することが可能となるので、系に対して固有値解析を行う。また複数の負の固有値の内いずれかが真のつり合い経路を示すので、それぞれの負の固有値に対応する固有ベクトルから各固有モードを知る必要がある。上記の系に対して正規化された負の固有値に対応する各固有モードを図-2に示す。同図より二つの負の固有値が発生していることから、つり合い経路は二つ存在することが分かり、一つは一次モード(固有値 = -0.91274 : 固有値が零に近い固有モード)を示し、その後の変形挙動を予測させるモード形状となるが、もう一方の固有モード(固有値 = -12863.3)はそれまでの変形状態から全く異なる状態へ移行する可能性を有する。そこで、変位増分ベクトル $\{\Delta u\}$ を零に近い固有値に対応する固有ベクトル $\{v\}$ を用いて次式のように仮定する。

$$\{\Delta u\} = \alpha \{v\} \quad \dots(4)$$

ここで、 α は任意のスカラーである。

また、この軟化領域でのエネルギーの変化を図-3に示す。同図においてひずみエネルギー及び運動エネルギーの関係について考えると、不安定なつり合い状態を示す軟化部中では、ひずみエネルギーは極小に向かって減少し、その間に解放されるエネルギーは運動エネルギーに変換され、系は安定なつり合いへと瞬時に移行する。したがって軟化領域から安定な状態への移行は、よりひずみエネルギーの小さな経路すなわち最大エントロピーを示す経路を選択するものと考えられ、ひずみエネルギーが最小となる位置において系は安定なつり合い状態を保つこととなる。よって、式(4)における α はこの条件を満たす値により変位増分ベクトルが得られる。

しかし、ここで式(4)中の一次モードを示す固有ベクトル $\{v\}$ に関して考慮すべきことがある。この $\{v\}$ をもう一方の負の固有値に対応する固有ベクトルを用いて変位増分ベクトルを仮定した場合に得られる最小ひずみエネルギーに対して、本来の式(4)で得られる最小ひずみエネルギーの値が必ずしも小さくなるとは断言できない。しかしながら全く異なる変形挙動へ移行する固有モードの採用は、軟化領域後の応答の追跡という目的に



固有値：-0.91274

固有値：-12863.3

図-2 負の固有値に対する各固有モード（水平成分）

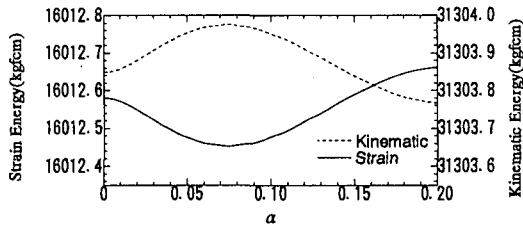


図-3 軟化領域におけるエネルギーの変化

対してあまり現実的ではなく、また両者の最小ひずみエネルギーの値自体に大きな差が無いことから、式(4)の仮定が結果に及ぼす影響はそれほど大きくないと考えられる。

よって、式(4)の α に任意の値を与え各応答値を試算し、ひずみエネルギーが最小値となるまで繰り返し計算を行い、最小値を示した場合に系の安定なつり合い状態へ移行したとみなして繰り返し計算を終了する。この様に安定なつり合い経路を選択することにより、軟化後の応答の追跡が可能となる。

4. 橋脚の非線形曲げ振動解析

解析では橋脚を離散質点系はり要素にモデル化し、前述した解析手法を用いてM- ϕ 曲線の軟化を考慮した非線形曲げ振動解析を行い、不安定問題を有する動的解析例を示すとともに鋼製橋脚の座屈問題等への適用性を検討する。また、数本の直線により履歴復元力をモデル化した非線形振動解析を行い、本解析手法によって得られた各応答結果との比較を行う。以下、解析モデル及び応答解析結果について示す。

4.1 解析モデル

履歴復元力をモデル化した解析では曲げモーメントと曲率の関係を各断面変化部に対応した3つの断面について図-5の様に直線で近似することにより、非線形な復元力のモデル化を行った。これは鋼製橋脚の曲げ耐力に関するM- ϕ 曲線の包絡線をモデル化したものである。

4.2 応答解析結果

前節で示した橋脚モデルに対し式(2)の増分形の運動

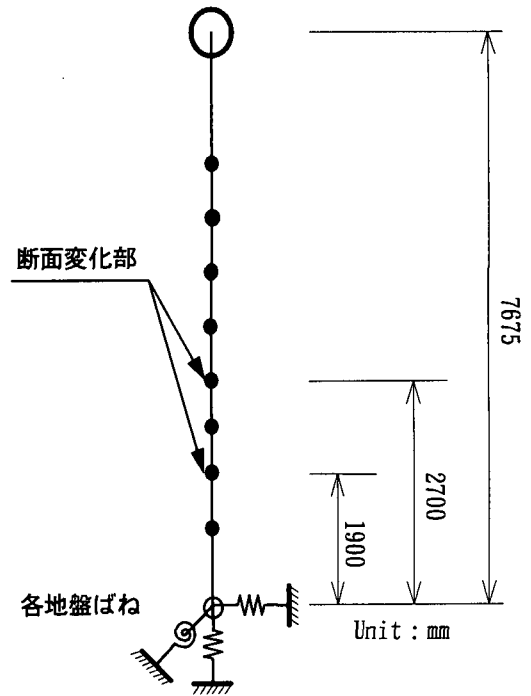


図-4 橋脚の離散質点系解析モデル図

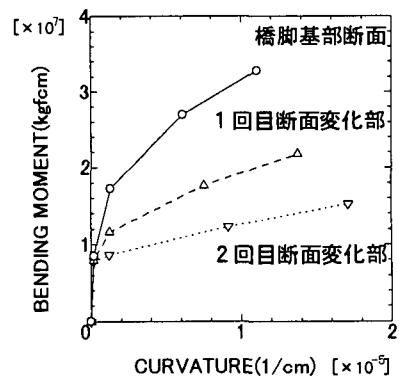
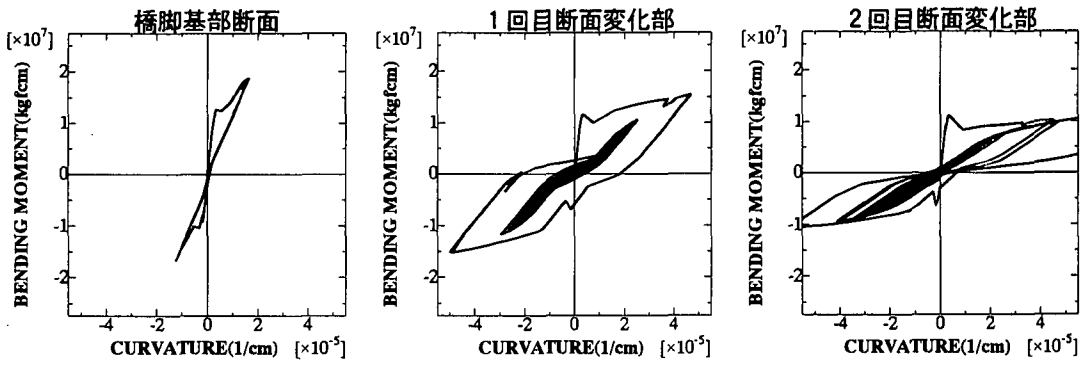


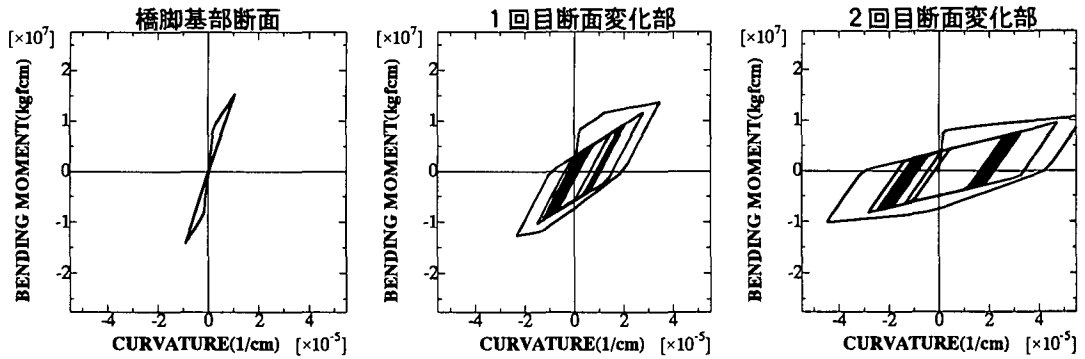
図-5 曲げモーメント-曲率曲線モデル

方程式を組み、逐次積分して非線形振動解析を行った。非線形復元力は応答結果からはり要素内の応力分布を求め、曲げモーメントと曲率の関係(M- ϕ 曲線の傾き)より曲げ剛度を計算し剛性マトリックスを作成して算定するが、軟化した場合には3章で示した解析手法にしたがって計算を進めることによりM- ϕ 曲線の軟化を考慮した非線形振動解析を行う。解析は挙動の把握を簡単にするため、解析モデルへの入力加速度をsin波(加速度振幅400gal, 周期0.4sec)とし、数値積分はWilsonの θ 法($\theta=1.4$)を用い、時間間隔 Δt は 2.0×10^{-5} sec、解析時間は10secとした。また、履歴復元力をモデル化した解析においては前節で示したM- ϕ 曲線モデルを用いて非線形復元力を算定し応答計算を行った。以後、応答解析結果を示し、その考察を行う。

図-6にM- ϕ 曲線履歴を示す。図中の上のグラフがM- ϕ 曲線の軟化を考慮した解析、下のグラフが履歴復

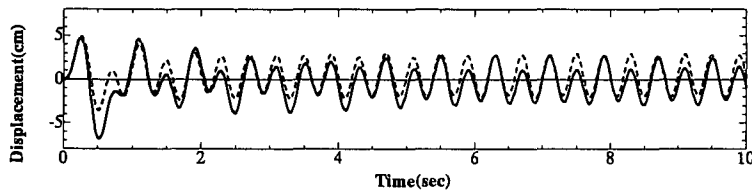


(a) M-φ曲線の軟化を考慮した解析



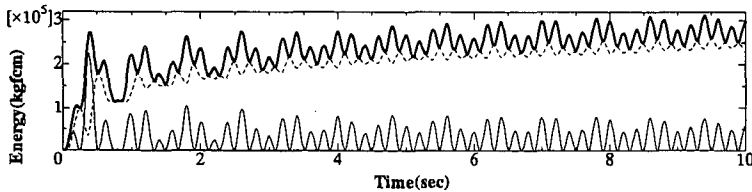
(b) 履歴復元力をモデル化した解析

図-6 曲げモーメント-曲率曲線履歴

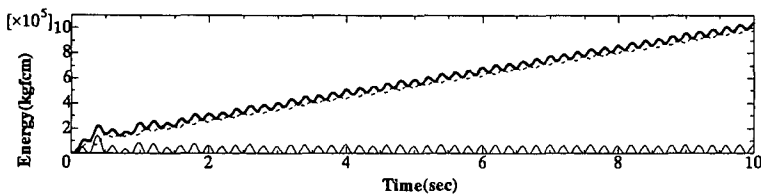


実線：
M-φ曲線の軟化を考慮した解析
破線：
履歴復元力をモデル化した解析

図-7 水平変位応答の比較



(a) M-φ曲線の軟化を考慮した解析



(b) 履歴復元力をモデル化した解析

図-8 エネルギー応答

各グラフは上より
入力エネルギー (太線)
ひずみエネルギー (破線)
運動エネルギー (細線)

元力をモデル化した解析となっている。両解析とも鋼材量の少ない断面変化部で塑性化し、特に2回目断面変化部の損傷が卓越する。M- ϕ 曲線の軟化を考慮した解析では全断面で曲率が約 3.0×10^{-6} 付近にて飛び移りが確認できるが、各断面において安定なつり合い状態への飛び移り位置はそれぞれ異なっていることが分かる。飛び移り後は剛性低下が現れ、M- ϕ 曲線の傾きが小さくなる。また、両解析から得られた履歴曲線を比較すると、履歴復元力をモデル化した解析による結果は除荷後の履歴が平行四辺形状の経路をたどるのに対し、M- ϕ 曲線の軟化を考慮した解析では履歴曲線の描く面積が比較的小さいことが分かる。両解析で得られた結果は除荷後の履歴が大きく異なることを示すが、特に2回目断面変化部での比較を行うとその傾向が顕著に現れており、モデル化した解析では残留曲率を有するのに対し、M- ϕ 曲線の軟化を考慮した場合には原点指向の履歴特性となっている。

次に図-7において橋脚自由端部での水平変位応答の比較を示した。実線で表されたM- ϕ 曲線の軟化を考慮した解析では約 0.5sec にて最大変位を示すが、この近傍で橋脚基部や断面変化部にて軟化が発生しており、断面損傷が大きな要因と考えられる。また、それ以降の応答を比較すると応答性状はやや異なり、M- ϕ 曲線の軟化を考慮した解析では若干大きく振動しているのが分かる。

式(3)により得られる各エネルギーの応答結果に関して図-8に示した。図中の上のグラフはM- ϕ 曲線の軟化を考慮した解析、下のグラフは履歴復元力をモデル化した解析であり、各グラフの上より入力エネルギー、ひずみエネルギー、運動エネルギーをそれぞれ表している。ひずみエネルギーの蓄積に着目して両解析結果の比較を行うと、0.5sec 付近までは同程度の蓄積量及び応答を示すが、それ以降のひずみエネルギーの蓄積とその過程は著しく異なることが把握できる。そして最終的に構造物の系に蓄積されるひずみエネルギーは、軟化を考慮した解析では約 2.5×10^5 kgfcm となるのに対しモデル化した解析では4倍の約 1.0×10^6 kgfcm となっている。しかしながら図-6を見ると断面の損傷は明らかにM- ϕ 曲線の軟化を考慮した解析の方が大きい。これは先に述べたM- ϕ 曲線の履歴経路に関係し、その履歴曲線で囲まれる面積が系に蓄積されるエネルギー量を示すためである。したがってモデル化した解析では履歴経路の面積がM- ϕ 曲線の軟化を考慮した解析に比して大きいと、この様なエネルギーの蓄積量の相違が得られたものと考えられる。また、ひずみエネルギーの蓄積過程に関しては、モデル化した解析では除荷後のM- ϕ 曲線の履歴が平行四辺形状に同一の経路へ収束してゆく為、ひずみエネルギーの蓄積も直線的に増加するが、軟化を考慮した解析では除荷時の履歴曲線の与える面積が比較的小さいので緩やかな曲線状の増加を示す。

4. 3 鋼製橋脚の座屈問題等への適用性について

鋼製橋脚をはじめ鋼部材や板・シェル等の局部座屈を伴う極限性状及びその変形性能に関する研究は近年盛んに行われてきたが、それらは単調増加荷重を受ける場合等の静的問題が多く、これらは極限耐荷力の算定が目的であり、鋼製橋脚の耐震設計に関して討議するためには、極限耐荷力を超えたピーク後の劣化領域における挙動を解明するのが重要となる。また、動的問題に対する検討も必要となるが、これらに関する研究は実験的なものが主流であり、解析上の困難さから理論的研究は少ないのが現状である⁴⁾。

本論文で示した軟化部を有する動的解析手法及びその解析例は、現時点で即座に鋼製橋脚の座屈等の不安定問題に適用可能であるとは言えない。しかし、エネルギーに着目することにより、鋼製橋脚の座屈後の動的挙動を解析的に追跡する手法として本解析手法が何らかの方法を介して適用可能ではないかと考えている。また、これらの問題に対する理論体系の整備や煩雑な計算を伴わない様な実務設計への応用を考えた解析法についての検討も必要である。

5. 結論

本研究で得られた結果を以下にまとめる。

- 1) M- ϕ 曲線の軟化領域において系のつり合い状態が不安定となることを負の固有値と関連付けて示した。また、不安定領域でのひずみエネルギーを評価して安定なつり合い経路を選択することにより不安定問題を有する動的解析手法を示した。
- 2) 本論文で提案した解析手法を用いて、M- ϕ 曲線の軟化を考慮した橋脚の非線形曲げ振動解析を行い、履歴復元力をモデル化した解析との比較を行った。その結果、橋脚の動的挙動及び構造物の系に蓄積されるひずみエネルギーと履歴復元力特性との関係を明らかにした。

また、本論文では鋼製橋脚の座屈問題に対する本解析手法の適用方法について言及するまでに至っていないが、今後は更に本解析手法の妥当性を実験等の結果に対して比較解析を行うとともに鋼製橋脚の座屈問題等への適用方法について検討を進める。また本研究では構造減衰の影響を無視しており改善の余地を残している。

参考文献

- 1) 鈴木、宇佐美、寺田、伊藤、才塚：鋼製箱形断面橋脚の復元力モデルと弾塑性地震応答解析，土木学会論文集，No. 549/I-37，pp191-204，1996. 10
- 2) 中村、田辺：鉄筋コンクリートはりのポストピーク挙動に関する解析的研究，土木学会論文集，No. 490/V-23，pp81-90，1994. 5
- 3) 大島、三上、小倉、佐藤：段落し部を有するRC橋脚の強震時非線形挙動とエネルギー分布，構造工学論文

集, Vol. 41A, pp745-754, 1995. 3

- 4) 鋼構造委員会鋼構造動的極限性状研究小委員会：鋼構造物の弾塑性性状と耐震設計法, 土木学会論文集, No. 489/ I -27, pp1-16, 1994. 4

STABILITY OF NONLINEAR BENDING VIBRATION ANALYSIS OF PIER CONSIDERING THE SOFTENING OF M- ϕ CURVE

Toshiyuki OSHIMA, Shuichi MIKAMI, Yoshiki ISHIKAWA

Stability of nonlinear bending vibration analysis of steel pier is dealt with considering the softening of Moment-Curvature relationship (M- ϕ Curve). Strain energy consideration is useful to pass through this softening zone of M- ϕ Curve in numerical calculation. Hysteresis of M- ϕ relation, dynamic response of displacement and energy distribution response are shown in numerical results.