

線形計画法に基づく鋼製円すい型貯水槽 の塑性崩壊に関する研究

師自海¹・中野雅章²・桜井達朗²

¹正会員工博 日本工営株式会社 中央研究所 (〒300-1259 茨城県稲敷郡基崎町稲荷原 2304)

²正会員 日本工営株式会社 中央研究所 (〒300-1259 茨城県稲敷郡基崎町稲荷原 2304)

The past two decades had witnessed several structural failures of conical steel water tanks capped with cylindrical upper sections under hydrostatic pressure. In this paper, the limit analysis of steel conical water tanks is formulated as a linear programming (LP) problem, and the effectiveness of this approach is confirmed by comparison with experimental and numerical results available in the literature.

Key Words: conical tank, hydrostatic pressure, limit analysis, linear programming, stability

1. はじめに

静水圧下における円すい型貯水槽の構造安定性に関しては、ベルギーで起きた給水塔の崩壊事故を受けて Vandepitte ら¹⁾により実施された研究調査やその後カナダのフレデリクトンで発生した同様な事故に関する一連の研究調査²⁾ および El Damatty ら³⁾の FEM に基づいた数値解析が代表的な研究として注目された。

カナダの給水塔崩壊事故後の研究調査では、破壊した貯水槽はシェル厚が不十分であり、底板から約 0.6m 上の円すいシェルの壁に座屈が生じたことを明らかにした。更に、El Damatty らはひずみ硬化を考慮した大変形弾塑性有限要素解析を用いて構造安定性に対する初期不正や残留応力の影響について綿密な検討を行い、設計指針の不備がこのような崩壊事故を引き起こす一つの要因となることを指摘した。

本文では上部に円筒形キャップを備えた円すい型貯水槽の静水圧下における塑性限界状態について LP の問題として定式化を試みる。LP による解の精度については、数値解析の結果を文献から得た数値解析結果および実験結果と比較検討する。

2. 基本方程式

図-1 に示すように、上端は自由、下端は単純支持されている円錐シェルを考える。本研究では、円すい型貯水槽が完全弾塑性を有する均質等方性の材料からなり、

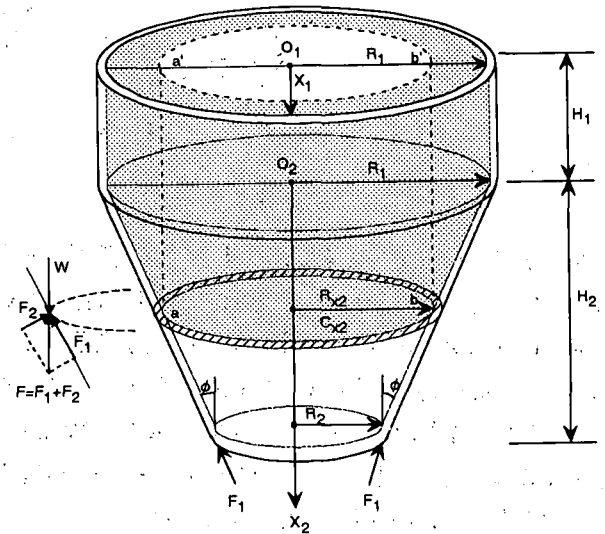


図-1 水の自重による断面力

板厚と変位に関する薄肉シェルの微小変形理論の諸基本仮定が成り立つものとする。

内水圧 P_1 を受ける微小円筒シェル要素に作用する断面力および円筒座標系 (X_1, θ, R_1) を図-2 に示す。問題の対称性を考慮し、内力に関する釣り合いは次のようになる。

$$\frac{d^2 M_1}{dX_1^2} + \frac{N_{\theta 1}}{R_1} - P_1 = 0 \quad (1)$$

円すいシェルの壁が水圧以外に上部の水の自重 W を受ける。圧縮力 N_m は、鉛直方向に関する力の釣り合い条件から次式より求められる。

$$N_m \cos \phi = W \quad (2)$$

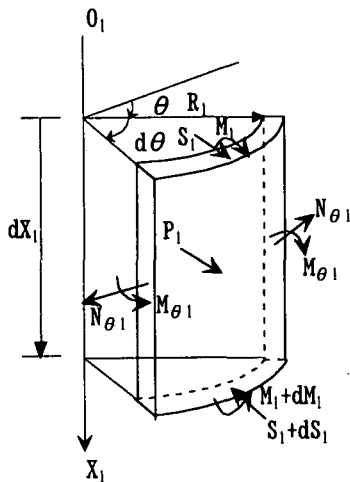


図-2 水圧を受ける微小円筒シェル要素の釣り合い

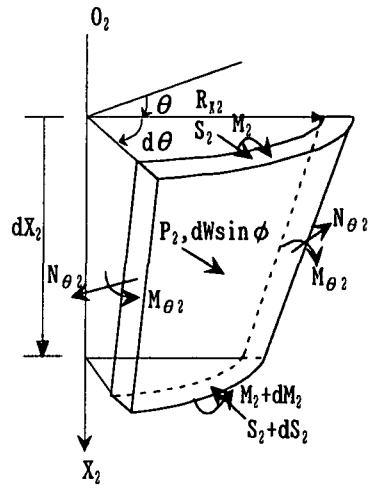


図-3 水圧および水の自重を受ける微小円筒シェル要素の釣り合い

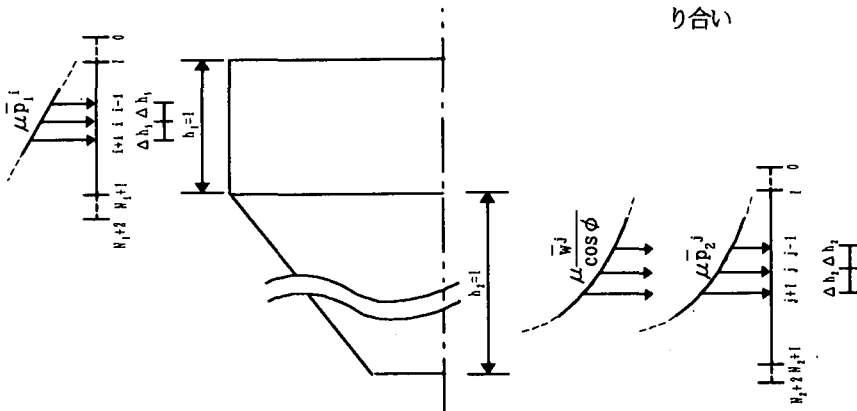


図-4 差分法によるアプローチ

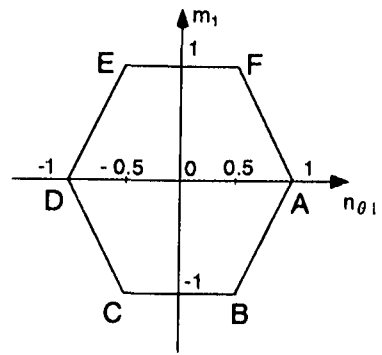


図-5 円筒シェルの降伏条件

図-3に微小シェル要素に作用する外力、断面力および円筒座標系 (X_2, θ, R_{12}) を示す。なお、圧縮力 N_m はすでに式(2)より定められたため、同項を図-3から除く。この問題に関しては微小要素の釣り合い条件を求める際に、壁と直角方向に作用する荷重成分 $W \sin \phi$ の増分 $dW \sin \phi$ を外力として考慮する必要がある。問題の対称性を考慮し、釣り合い式は次のようになる。

$$\frac{d^2 M_2}{dX_2^2} + \frac{N_{\theta 2}}{(R_1 \cos \phi - X_2 \sin \phi)} - \left(\frac{P_2}{\cos^2 \phi} + \frac{dW}{dX_2} \tan \phi \right) = 0 \quad (3)$$

3. 釣り合い式の離散化

釣り合い式に関する離散化は中点差分法を採用する⁴⁾。図-4に示すように、無次元高さ $h_1=1$ の円筒シェルおよび無次元高さ $h_2=1$ の円筒シェルを、それぞれ間隔 Δh_1 と Δh_2 で N_1 と N_2 等分する。区間 $[0, 1]$ において無次元モーメント m_1 と m_2 の二次微分を差分で表すと、任意の節点 i および j における無次元釣り合い式(1)と(3)は次のようになる。

$$\frac{m_1^{i-1} - 2m_1^i + m_1^{i+1}}{\Delta h_1^2} + 2\alpha_1^2 (n_{\theta 1}^i - \mu p_1^i) = 0 \quad i=1, \dots, N_1+1 \quad (4)$$

$$\frac{m_2^{j-1} - 2m_2^j + m_2^{j+1}}{\Delta h_2^2} + 2\alpha_2^2 (n_{\theta 2}^j - \mu p_2^j) = 0 \quad j=1, \dots, N_2+1 \quad (5)$$

また、無次元釣り合い式(2)の離散式は次のようになる。

$$n_m^j - \mu \frac{w^j}{\cos \phi} = 0 \quad j=1, \dots, N_2+1 \quad (6)$$

ここに、式(16)の両端部の節点0と N_1+2 、式(17)の両端部の節点0と N_2+2 は、差分法において使われるダミー点である。ここで、円筒型貯水槽の設計水位高さは H_1+H_2 とする。設計水位に対して、 μ はそれぞれ円筒シェルにおける水圧 p_1^i 、円筒シェルにおける水圧 p_2^j および前述した円環体内の水の自重 w^j に関する共通の荷重係数である。

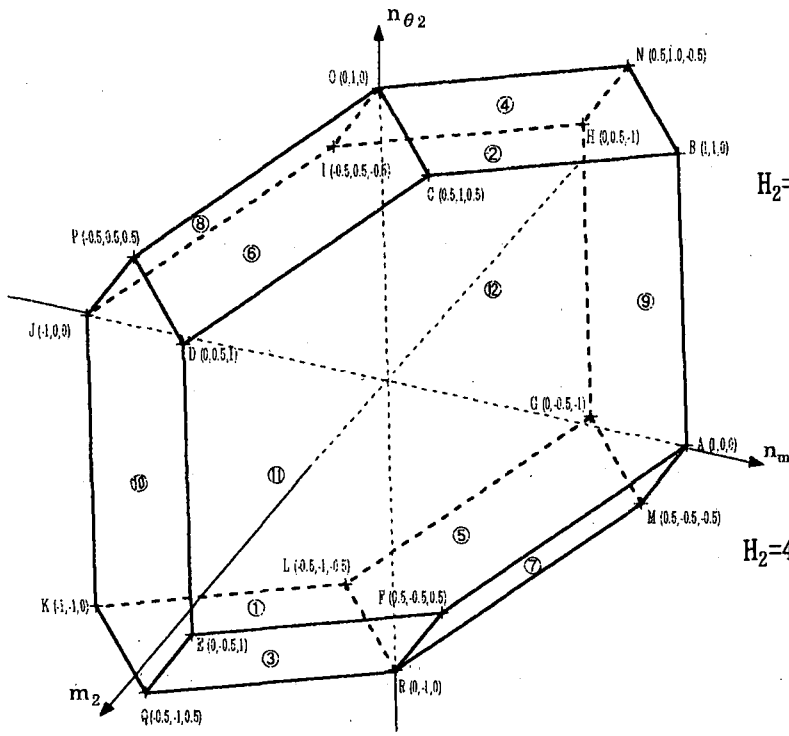
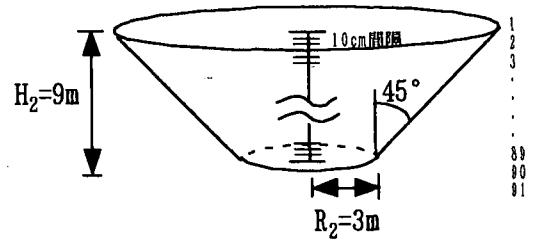
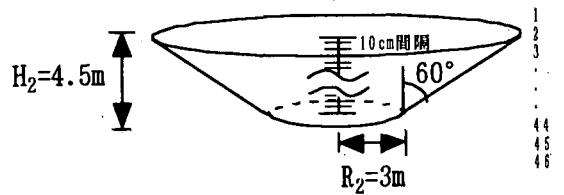


図-6 円すいシェルの降伏条件



(a)縦長貯水塔



(b)幅広貯水塔

図-7 差分法による円すいシェルの数値解析モデル

4. 降伏条件

円筒シェルに関する von Mises の降伏条件の六角形近似を図-5に示す⁵⁾。LPの問題として適用するためにこの六角形降伏条件式を一般化応力 $(n_{\theta 1}, m_1)$ に関する一次連立方程式に変換する必要がある⁴⁾。

$$Q_a^i = V_a^i \xi_a^i; i = 1, \dots, N_1 + 1 \quad (7a)$$

ここに、上式における節点 i に関する各成分は次のようになる。

$$Q_a^{iT} = (n_{\theta 1}^i, m_1^i) \quad (7b)$$

$$V_a^i = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 & -1 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7c)$$

$$\xi_a^{iT} = (\xi_{a1}^i, \xi_{a2}^i, \xi_{a3}^i, \xi_{a4}^i, \xi_{a5}^i, \xi_{a6}^i) \quad (7d)$$

$$\xi_{ak}^i \geq 0, k = 1, \dots, 6; \sum_{k=1}^6 \xi_{ak}^i \leq 1 \quad (7e)$$

円すいシェルに関する降伏多面体を図-6に示す。円筒シェルと同様、この凸多面体の降伏条件を一般化応力 $(n_m, n_{\theta 2}, m_2)$ に関する一次連立方程式に変換する。

$$Q_b^j = V_b^j \xi_b^j; j = 1, \dots, N_2 + 1 \quad (8a)$$

上式における節点 j に関する各成分は以下に示す。

$$Q_b^{jT} = (n_m^j, n_{\theta 2}^j, m_2^j) \quad (8b)$$

$$V_b^j = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & -1 & -1 & -0.5 \\ -1 & -1 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -0.5 & 1.0 & 1 & 0.5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \quad (8c)$$

$$\xi_b^{jT} = (\xi_{b1}^j, \xi_{b2}^j, \xi_{b3}^j, \dots, \xi_{b16}^j, \xi_{b17}^j, \xi_{b18}^j) \quad (8d)$$

$$\xi_{bl}^j \geq 0, l = 1, \dots, 18; \sum_{l=1}^{18} \xi_{bl}^j \leq 1 \quad (8e)$$

5. 線形計画法に関する定式化

線形計画法に基づく極限解析は塑性理論の下界定理を基盤としている。下界定理の下で塑性限界荷重を求めるために、力の釣り合い条件、降伏条件および境界条件の三者を満たす範囲において荷重係数 μ を最大化する。つまり、

$$\text{目的関数: } Z = \max[\mu]$$

$$\text{制約条件: 式 (7), 式 (8), 境界条件.} \quad (9)$$

表-1 解析ケース一覧表

| ケース | 厚み (mm) | R_2 (m) | H_2 (m) | ϕ |
|-----|---------|-----------|-----------|--------|
| T1 | 8.0 | 3.0 | 9.0 | 45° |
| T2 | 10.0 | 3.0 | 9.0 | 45° |
| T3 | 12.5 | 3.0 | 9.0 | 45° |
| B1 | 7.0 | 3.0 | 4.5 | 60° |
| B2 | 8.0 | 3.0 | 4.5 | 60° |
| B3 | 9.0 | 3.0 | 4.5 | 60° |
| B4 | 10.0 | 3.0 | 4.5 | 60° |

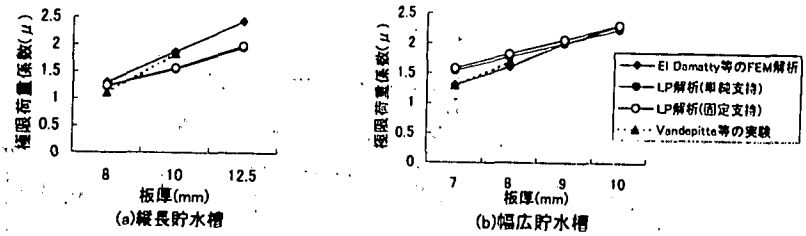


図-8 円すいシェルの極限荷重係数と板厚の関係

6. 数値解析結果および考察

(1) 解析条件

Vandepitte らの実験研究および El Damatty らの数値解析では、上部に円筒形キャップのない円すいシェルモデルを用いた。各ケースの寸法を表-1に示す。縦長貯水槽の3ケース (T1, T2 及び T3) の寸法は崩壊したフレデリクトンの貯水槽の寸法を参照している。材料特性に関しては、塑性限界状態を極限状態とする本解析では、必要となる物性値は降伏応力のみであり、ここでは $\sigma_y = 300\text{Mpa}$ である。差分近似に関しては、解の精度を確認した上で、各ケースとも 10cm の節点間隔で水槽を等分割する (図-7)。なお、本解析においては数値計画法の汎用ソフトとして知られる GAMS を用いた。計算時間に関しては、ここで使われた円すいシェルモデル (節点数 100 程度) においては数秒程度である。

(2) 静水圧下における円すいシェルの塑性崩壊

LP による極限解析の結果および El Damatty らの FEM による極限解析の結果を図-8に示す。同図には、El Damatty らが Vandepitte らの実験結果より求めた計4ケース (T1, T2, B1, B2) の初期不整のない完全円すいシェルにおける極限荷重係数も併せて示す。これらの結果から分かるように、数値解析アプローチの違いにより、極限荷重係数には最大約 20%相違が見られる。しかし、各アプローチの結果と実験結果とを比較すれば、LP 解析の精度は概ね良いと言える。

極限状態における各節点の内力値のうち、経線方向の無次元曲げモーメント m_2 の符号に基づき、円すいシェルの破壊形態を求め、塑性崩壊時の座屈が縦長貯水槽の場合は底板から約 0.6m、幅広貯水槽の場合は約 0.4m 上の壁より始まることが分かる。縦長貯水槽については、解析結果による座屈の発生場所と事故現場で目撃された破壊状況 (底板から約 0.6m 上で座屈) とがほぼ一致することから、フレデリクトンの貯水槽の破壊状況をほぼ再現できたと言える。

なお、塑性限界荷重に関しては、本研究の結果と El

Damatty らの有限要素解析の結果との相違については、LPによる定式化は微小変位理論の下で行われたにに対し、El Damatty らは有限要素の定式化に大変形理論を取り入れたことが主な原因と思われる。その他、ひずみ硬化の有無や、LPの解析における von Mises の降伏条件に対する線形近似なども要因として挙げられる。

7. 結論

本研究では、円すい型貯水槽の塑性崩壊について線形計画法の問題として定式化を行い、既往の研究成果との比較検討から概ね良い結果を得た。線形計画法によって問題を定義する過程において、構成方程式を直接導入しないため、薄肉平板やシェルの非線形有限要素解析にしばしば起こる構成方程式に起因する剛性の過大評価などの問題は存在しない。従って、線形計画法によるアプローチは、釣り合い条件、降伏条件及び境界条件さえ正確に求めることができれば、精度の高い解を簡単に求めることができる。

参考文献

- 1) Vandepitte, D., Rathe, J., Verheghe, B., Paridaens, R., and Verschaeve, C.: Experimental investigation of hydrostatically loaded conical shells and practical evaluation of the buckling load, *Buckling of shells*, E. Ramm, ed., Springer-Verlag KG, Berlin, Germany, pp375-399, 1982.
- 2) Dawe, J. L., Seah, C. K., and Abdel-Zaher, A. K.: Collapse of a water tower, *Proc. of the CSCE Conf.*, Canadian Society of Civil Engineering, Montreal, Canada, pp315-323, 1993.
- 3) El Damatty, A. A., Korol, R. M., and Mirza, F. A.: Stability of imperfect steel conical tanks under hydrostatic loading, *J. Struct. Eng.*, Vol.123, No.6, pp.703-712, 1997.
- 4) Tin-Loi, F., and Pulmano, V. A.: Limit loads of cylindrical shells under hydrostatic pressure, *J. Struct. Eng.*, Vol.117, No. 3, pp.643-656, 1991.
- 5) Hodge, P.G.: The rigid-plastic analysis of symmetrically loaded cylindrical shells, *J. Appl. Mech.*, Vol.21, pp.336-442, 1954.