

適応型モンテカルロフィルタを用いた 構造システムの同定

佐藤 忠信¹・原田 俊崇³

¹正会員 工博 京都大学防災研究所教授(〒611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

³学生員 京都大学大学院工学研究科(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

System identification technique is one of tools to detect damage to structure systems. In this paper, a method to identify non-linear structure systems is presented. We applied basic concept of the Monte Carlo filter to develop an adaptive Monte Carlo filter. The developed filter algorithm is applied to identify a structure with non-stationary dynamic characteristics. First, for the case that there is no information of non-linear constitutive equation of structural elements, we develop a non-parametric identification technique. Second, for the case that Versatile constitutive equation is assigned to model the restoring force of structural elements, we developed a method to identify non-linear structural parameters.

Key Words : structural identification, health monitoring, Monte Carlo filter,
Nonlinear structure system,

1. はじめに

システム同定は構造物のヘルスマonitoring手法の一つである。ここで、構造物に対するシステム同定とは、構造物の振動計測結果からその構造物の動特性を同定するものと定義する。本研究では、非線形構造システムに着目する。構造物の耐震性能を把握し、またその振動を制御するためには、構造物の動特性を正確に捉え、構造物が地震動などの外乱に対して示す応答特性を把握することが重要である。また、既存構造物に対して、補強などの耐震対策を実施するにあたっては、構造物の経年劣化や過去の地震などにより、その動特性が変化している場合が考えられる。その場合、当該時点での構造物の動特性を、詳細かつ簡便に把握することが重要になってくる。

そこで、本研究では、システム同定の手法を用いて、非線形構造システムを対象に、その動特性を同定し、構造物の非線形挙動を再現するアルゴリズムを開発する。その際用いる手法として、北川によって開発されたモンテカルロフィルタをとりあげる。モンテカルロフィルタでは、観測値が得られた時の状態量の条件付確率分布は m 個の粒子と呼ばれる実現値を用いて表現

される。まず、それらの粒子の状態変化を状態方程式に基づいてシミュレートし状態量の予測分布を求める。次に、それぞれの粒子の尤度に応じて、粒子をリサンプリングすることで状態量のフィルタ分布を同定する。また、実現値によって確率分布を近似することにより、非線形・非ガウス型状態空間モデルを用いることができる。

本研究では、非線形構造システムに対して、線形化した状態空間モデルを用いた同定手法として、逐次線形化法を用いた手法と復元力モデルとして Versatile 型復元力モデルで表されるモデルに対して、その非線形パラメータをモンテカルロフィルタを用いて同定する。

2. 適応型モンテカルロフィルタ

観測値 y_n と状態量 x_n の間に、以下のような状態方程式と観測方程式が成り立つシステムを対象とする。

$$x_n = F(x_{n-1}, w_n) \quad (1)$$

$$y_n = H(x_n, v_n) \quad (2)$$

ここで、 w_n はシステムノイズ、 v_n は観測ノイズであり、それぞれ任意の分布 $q(w), r(v)$ に従うものとする。また、観測ノイズ v_n は x_n, y_n が与えられると一意に決まり、 y_n に関して微分可能な関数 G を用いて以下のように入えられるものとする。

$$v_n = H^{-1}(y_n, x_n) = G(y_n, x_n) \quad (3)$$

このとき、モンテカルロフィルタでは以下のようなアルゴリズムで予測分布 $\{b_n^{(l)} \dots b_n^{(m)}\}$ とフィルタ分布 $\{f_n^{(l)} \dots f_n^{(m)}\}$ を求めることができる。ただし、以下のアルゴリズムの各ステップで $j=1 \sim m$ について計算する。

- (1) 乱数 $f_0^{(l)} \sim p_0(x)$ を生成し、状態量の初期分布とする。
- (2) 以下の過程を繰り返す
 - (a) 乱数 $w_n^{(l)} \sim q(w)$ を生成し、システムノイズとする。
 - (b) 状態方程式から粒子の遷移を求める。

$$b_n^{(l)} = F(f_n^{(l)}, w_n^{(l)}) \quad (4)$$

- (c) 粒子 $b_n^{(l)}$ の尤度を求める。

$$\alpha_n^{(l)} = r(G(y_n, b_n^{(l)})) \partial G / \partial y_n \quad (5)$$

- (d) 尤度 $\alpha_n^{(l)}$ に比例した確率で $b_n^{(l)}$ をリサンプリングすることにより $f_n^{(l)}$ を生成する
- (e) (a) に戻る。

また、非定常動特性を有する構造系の動特性を同定するためには、過去の観測値より新しい観測値に依存した同定を行う必要がある。そこで適応型モンテカルロフィルタでは、過去と現在の観測値の重み付けを行う。つまり、状態方程式に適応ノイズ ϵ_n を付加する。

$$x_n = F(x_{n-1}, w_n) + \epsilon_n \quad (6)$$

適応ノイズ ϵ_n は予測分布 $\{b_n^{(l)} \dots b_n^{(m)}\}$ の分散の β_n 倍の分散を持つ平均値 0 のガウス分布とする。適応ノイズの導入により予測分布の分散は大きくなり、過去の観測値の信頼性が低くなり、相対的に新しい観測値に

依存した同定が行える。

3. 逐次線形化法による非線形構造同定

(1) 同定手法

逐次型線形化法とは、非線形モデルの応答を増分表現を用いることで線形化する手法である。

地震外力が作用する n 自由度線形構造系の質点 i における増分形で表した運動方程式は次式で与えられる。

$$m_i(\Delta \ddot{z}_i + \Delta \ddot{z}_g) + c_i \Delta \dot{u}_i + k_i \Delta u_i - (1 - \delta_m)(c_{i+1} \Delta \dot{u}_{i+1} + k_{i+1} \Delta u_{i+1}) = 0 \quad (7)$$

ここで m_i, c_i, k_i はそれぞれ質点 i における質量、粘性減衰係数、剛性であり、 Δz_i は構造物の地盤に対する変位の増分形、 $\Delta \ddot{z}_g$ は地動加速度の増分形、また $\Delta u_i = \Delta z_i - \Delta z_{i-1}$ である。

いま、質点 i における復元力 f_i は次式で表される。

$$f_i = c_i \Delta \dot{u}_i + k_i \Delta u_i \quad (8)$$

そして式(8)を式(7)に代入して、復元力 f_i の漸化式と見て f_i を求めると次式のようになる。

$$f_i = -\sum_{j=i}^n m_j (\Delta \ddot{z}_j + \Delta \ddot{z}_g) \quad (9)$$

式(8)、式(9)より質点 i における運動方程式は以下のよう書きかえることができる。

$$\sum_{j=i}^n m_j (\Delta \ddot{z}_j + \Delta \ddot{z}_g) = -c_i \Delta \dot{u}_i - k_i \Delta u_i = [-\Delta \dot{u}_i \quad -\Delta u_i] [c_i \quad k_i]^T \quad (10)$$

いま、式(10)において左辺を観測量 y_i 、状態量 $x_i = [c_i \quad k_i]^T$ として以下のような観測方程式が得られる。

$$y_i = H_i x_i \quad (11)$$

また、状態方程式は次式を用いる。

$$x_{n+1} = I x_n \quad (12)$$

ここで、 I は 2×2 の単位行列であり状態遷移行列に相当する。そして、式(11)、(12)を適応型モンテカルロフィルタに適用する。

(2) 数値解析

2 自由度非線形構造系 (Versatile 型復元力モデル) を対象に数値解析を行う。図 1 はモデルの諸元である。入力地震動として El Centro 地震記録を用い、得られた応答に 1% のホワイトノイズを付加して観測値とする。サンプリング時間は 0.01sec で 1000 ステップ (10sec) とする。構造物の質量、各質点の絶対加速度、地上に対する相対速度、相対変位を既知として、同定を行う。なお、システムノイズと観測ノイズの分布形は正規分布を仮定し、粒子数は 1000 とする。また、同定値は得られたフィルタ分布の平均値とする。図 2 は 1 階における剛性の同定時刻歴と、200~500 ステップの区間を拡大した図を示している。ここで剛性の真値とは復元力と変位との関係を表す履歴曲線における傾きとしており、その変化に追従できていることが確認できる。図 3 は同定値を用いて再現された応答履歴と観測された履歴の比較、図 4 は再現された変位の真値との比較を示している。なお、応答の再現には増分形の運動方程式を Newmark β 法を用いて数値的に積分することにより行った。粘性減衰係数や剛性が時変である場合にはこの方法が有効である。図 3、図 4 より十分な応答の再現が行われていることが分かる。

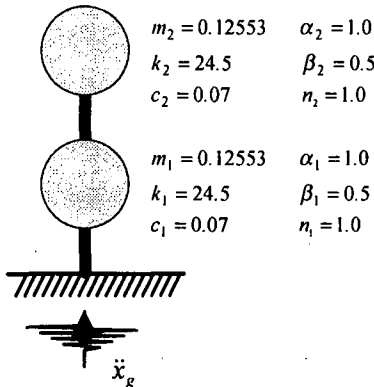


図 1 解析モデル

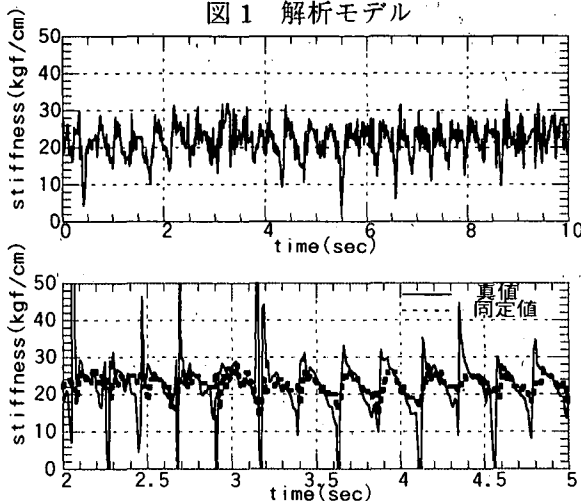


図 2 質点 1 の剛性の同定時刻歴とその拡大図

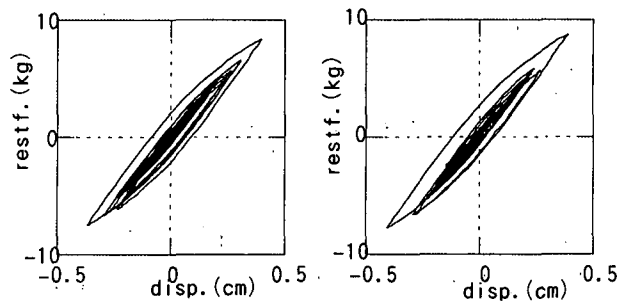


図 3 質点 1 の再現履歴の比較
(左)真の履歴(右)再現履歴

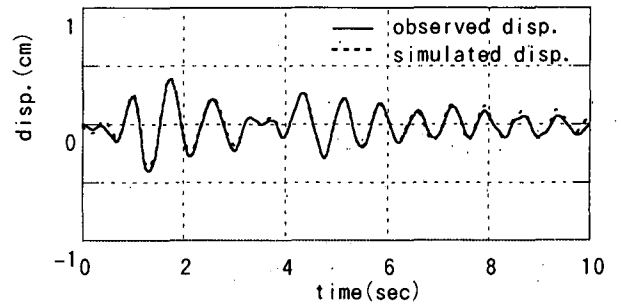


図 4 再現された応答変位(質点 1)

4. 非線形パラメータの同定

(1) 同定手法

非線形 n 自由度モデルの質点 i における運動方程式は次式で与えられる。

$$m_i(\ddot{x}_i + \ddot{x}_g) + c_i \dot{u}_i + z_i - (1 - \delta_m)(c_{i+1} \dot{u}_{i+1} + z_{i+1}) = 0 \quad (13)$$

ここで、 m_i ; 質量, x_i ; 地面に対する相対変位, c_i ; 粘性減衰係数, \ddot{x}_g ; 地動加速度, u_i ; 層間変位である。 z_i ; 層間復元力は次式の Versatile 型復元力モデルを用いる。

$$z_i = k_i \dot{u}_i - \alpha_i |\dot{u}_i| |z_i|^{n_i-1} z_i - \beta_i \dot{u}_i |z_i|^{n_i} \quad (14)$$

ここで、 k_i ; 初期剛性, α_i, β_i, n_i ; 非線形パラメータである。 n_i を含めたすべてのパラメータを同定するため、Versatile 型復元力モデルを式(13)の右辺第 2 項と第 3 項の n_i に $1 \sim m$ を代入した項の和(多次元 Versatile 型復元力モデル)として、次式のように与える。

$$z_i = k_i \dot{u}_i - \sum_{j=1}^m (\alpha_{ij} |\dot{u}_i| |z_i|^{j-1} z_i + \beta_{ij} \dot{u}_i |z_i|^j) \quad (15)$$

ここで、 α_{ij}, β_{ij} は質点 i の Versatile 型復元力モデルの n_i に j を代入した項のパラメータを示す。また、 j, m は自然数とする。式(13)を復元力 z_i の漸化式と考え、

z_i について解くと、次式のようになる。

$$z_i = -c_i \dot{u}_i - \sum_{j=i}^n m_j (\ddot{x}_j + \ddot{x}_g) \quad (16)$$

ここで、観測値として各質点の加速度応答 \ddot{x}_i 、速度応答 \dot{x}_i および地動加速度 \ddot{x}_g ならびに各質点の質量を既知とする。また、各質点の粘性減衰係数 c_i は線形領域での同定が可能であるから、ここでは既知とすると、式(16)より復元力 z_i が観測値として得られる。また、台形公式を用いて式(15)を時間積分し、式(13)を増分表現にした運動方程式に代入して書きかえると次式で表される観測方程式が得られる。

$$\begin{cases} m_1 (\Delta \ddot{x}_1 + \Delta \ddot{x}_g) + c_1 \Delta \dot{u}_1 - c_2 \Delta \dot{u}_2 \\ m_2 (\Delta \ddot{x}_2 + \Delta \ddot{x}_g) + c_2 \Delta \dot{u}_2 - c_3 \Delta \dot{u}_3 \\ \vdots \\ m_n (\Delta \ddot{x}_n + \Delta \ddot{x}_g) + c_n \Delta \dot{u}_n \end{cases} = \begin{bmatrix} h_1 & -h_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & -h_3 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & h_i & -h_{i+1} & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & h_{n-1} & -h_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & h_n \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{cases} \quad (17)$$

$$h_i = \{K_i, A_{i1}, B_{i1}, \cdots, A_{ij}, B_{ij}, \cdots, A_{im}, B_{im}\} \quad (18)$$

$$x_i = \{k_i, \alpha_{i1}, \beta_{i1}, \cdots, \alpha_{ij}, \beta_{ij}, \cdots, \alpha_{im}, \beta_{im}\}^T \quad (19)$$

$$K_i = \frac{1}{2} \{ \dot{u}_i(t) + \dot{u}_i(t-1) \} \Delta t \quad (20)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \dot{u}_i(t) \| z_i(t) \right\}^{j-1} z_i(t) + \left\{ \dot{u}_i(t-1) \| z_i(t-1) \right\}^{j-1} z_i(t-1) \Delta t \quad (21)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \dot{u}_i(t) z_i(t) \right\}^j + \left\{ \dot{u}_i(t-1) z_i(t-1) \right\}^j \Delta t \quad (22)$$

また、状態方程式は式(12)を用いることにする。式(12),(17)を用いることでモンテカルロフィルタを用いて $k_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ の同定を行う。

(2) 数値解析

本章でも、前章と同じ 2 自由度非線形構造系に対し

で非線形パラメータ $n=1$ の場合を対象に、一次元 Versatile モデルを用いて数値解析を行う。なお、その他の解析条件は 3 章で用いたものと同じとする。また、状態量 α, β の初期分布には一様分布 $U[0, 2]$ を使い、その他はすべてガウス分布とする。図 5 は初期剛性とパラメータ α, β の同定時刻歴を、図 6、図 7 は同定値を用いて再現された応答履歴と変位の真値との比較を示している。図 5 よりいずれも真値にほぼ収束している。また、図 6、図 7 より、精度良く応答の再現が行われていることが分かる。

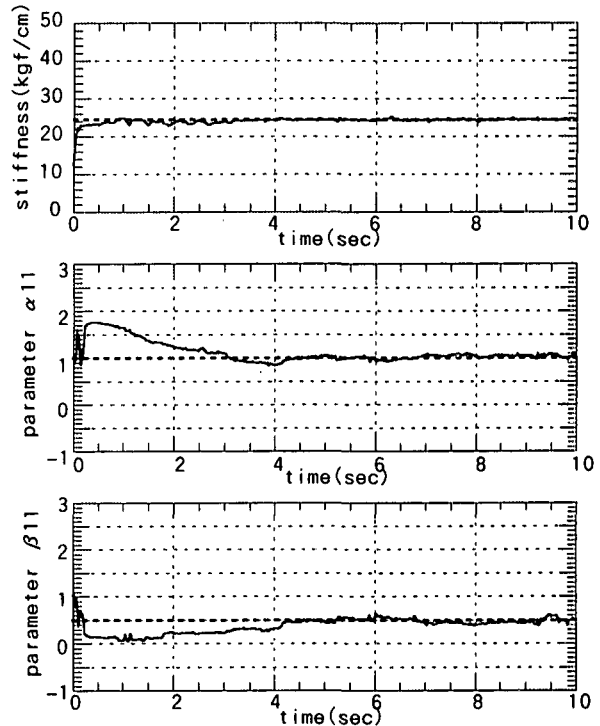


図 5 初期剛性、パラメータ α, β の同定時刻歴(質点 1)

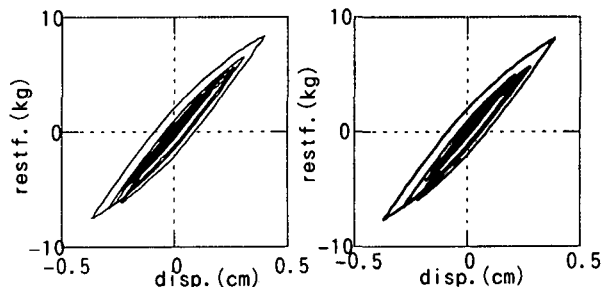


図 6 質点 1 の再現履歴の比較 (左)真の履歴(右)再現履歴

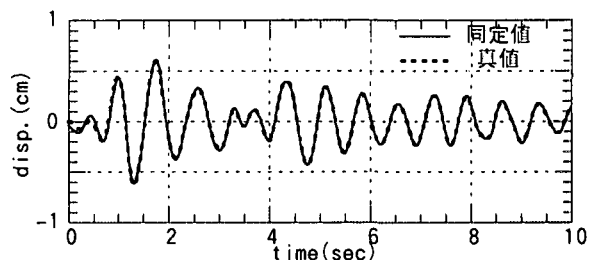


図 7 再現された変位応答(質点 1)

5. 非線形状態方程式を用いた同定

(1) 同定手法

非線形 n 自由度モデルの質点 i における運動方程式は次式で与えられる。

$$m_i(\ddot{x}_i + \ddot{x}_g) + c_i \dot{u}_i + z_i - (1 - \delta_m)(c_{i+1} \dot{u}_{i+1} + z_{i+1}) = 0 \quad (23)$$

ここで、 m_i は質点 i の質量、 x_i は質点 i の地盤に対する相対変位、 c_i は質点 i の粘性減衰係数、 \ddot{x}_g は地震による地動加速度、 u_i は $i-1$ 番目と i 番目の層間変位であり、 $u_i = x_i - x_{i-1}$ で表され、 $i=0$ のとき $x_0 = 0$ とする。 δ_m はクロネッカーのデルタであり、 $i=n$ のとき値 1 を持ち、それ以外では 0 となる。 z_i は $i-1$ 番目と i 番目の層間復元力であり、次式の Versatile 型復元力モデルを用いる。

$$\dot{z}_i = k_i \dot{u}_i - \alpha_i |\dot{u}_i| |z_i|^{n_i-1} z_i - \beta_i \dot{u}_i |z_i|^{n_i} \quad (24)$$

ここで、 k_i は初期剛性を示すパラメーター、 α_i, β_i および n_i は非線形パラメーターである。ここで、質点 i を取り出し 1 自由度系とみなして、微小線形振動時の等価減衰定数 h_i 、等価固有円振動数 ω_i を以下のように定義する。

$$h_i = \frac{c_i}{2\sqrt{m_i k_i}} \quad (25)$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}} \quad (26)$$

なお、これらは多自由度系の振動モードに対応するものではない。式(25),(26)を式(23)に代入すると運動方程式は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i + 2h_i \omega_i \dot{u}_i + \frac{z_i}{m_i} \\ - (1 - \delta_m) \frac{m_{i+1}}{m_i} \left(2h_{i+1} \omega_{i+1} \dot{u}_{i+1} + \frac{z_{i+1}}{m_{i+1}} \right) = -\ddot{x}_g \end{aligned} \quad (27)$$

同定に際して、質量 m_i 、Versatile 型復元力の非線形パラメーター n_i は既知とする。したがって、同定の対象となるパラメーターは線形パラメーター h_i, ω_i と非線形パラメーター α_i, β_i であり、それらに応答変位、応

答速度、復元力を加え、以下のような状態量ベクトルを考える。

$$x_i = \{ \dots x_i \quad \dot{x}_i \quad z_i \quad h_i \quad \omega_i \quad \alpha_i \quad \beta_i \quad \dots \}^T \quad (28)$$

運動方程式を表す式(27)と Versatile 型復元力を表す式(24)を用いると、次式のような一階微分方程式で表される状態方程式が得られる。

$$\dot{x}_i = g(x_i) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \dot{x}_i \\ -2h_i \omega_i \dot{u}_i - \frac{z_i}{m_i} + (1 - \delta_m) \frac{m_{i+1}}{m_i} \left(2h_{i+1} \omega_{i+1} \dot{u}_{i+1} + \frac{z_{i+1}}{m_{i+1}} \right) - \ddot{x}_g \\ m_i \omega_i^2 \dot{u}_i - \alpha_i |\dot{u}_i| |z_i|^{n_i-1} z_i - \beta_i \dot{u}_i |z_i|^{n_i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (29)$$

これを解くと次式のようにになる。

$$x_i = F(x_{i-1}) = x_{i-1} + \int_{t-1}^t g(x_{i-1}) dt \quad (30)$$

また、全質点で変位応答と速度応答が観測値として得られるとすると、観測方程式は以下のようにになる。

$$y_i = H_i x_i \quad (31)$$

ただし、

$$H_i = \begin{bmatrix} D & & & & & & & \\ & D & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & & D & & & \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

である。

以上より、式(30),(31)で表される状態空間モデルに対して、モンテカルロフィルタを用いて $h_i, \omega_i, \alpha_i, \beta_i$ の同定を行う。

(2) 数値解析

本章では, Versatile 型復元力モデルで表される 1 自由度構造系に対して, 速度, 変位応答が観測値として得られ, また質量が既知という条件のもとで解析を行う. モデルの諸元については前章と同じものとする. また, システムノイズなどの確率分布はすべてガウス型と仮定している. なお, モンテカルロフィルタで用いる粒子数を $m=10000$ 個として, 500 ステップ (5sec) のリサンプリングにより構造パラメータの同定を行う.

図 8 に各状態量の同定時刻歴を示す. 図 8 より, 固有円振動数 ω や非線形パラメータ α, β は真値にほぼ収束していることが分かる. しかし, 減衰定数 h に関しては収束性が悪い.

次に, 同定結果を用いて応答の再現を行ったのが図 9, 図 10 である. 図 9 は履歴曲線の真値との比較であり, 図 10 は変位応答の真値との比較である. これらより, ほぼ応答の再現ができていていることが分かる.

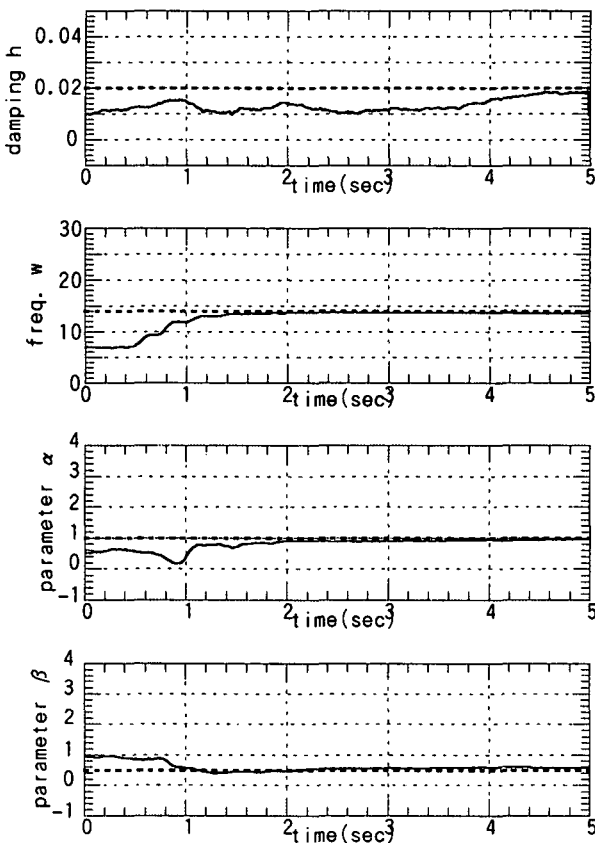


図 8 パラメータの同定時刻歴

(上から減衰定数, 固有円振動数, パラメータ α, β)

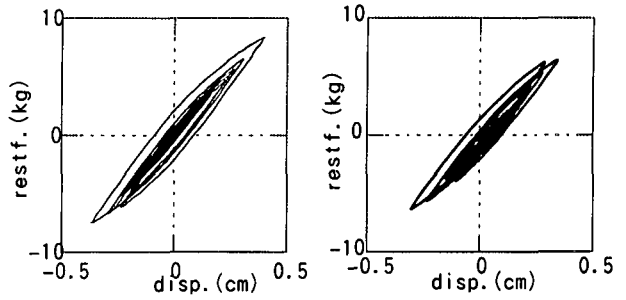


図 9 再現履歴の比較

(左)真の履歴(右)再現履歴

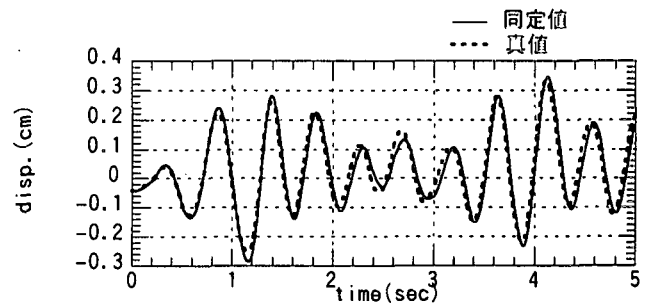


図 10 再現された変位応答

6. まとめ

本研究では適応型 MCF を非線形構造システムの同定に適用した. 逐次型線形化法を用いた手法では非定常な状態量に対して, 適応型 MCF の追従性が示された. また, 非線形パラメータの同定から非線形応答を精度良く再現することが出来た. そして, 非線形状態方程式を用いた手法においてもモンテカルロフィルタを用いた同定が可能であることが示された.

参考文献

- 1) Genshiro Kitagawa: Monte Carlo Filter and Smoother for Non-Gaussian Nonlinear State Space Models, Journal of Computational and Graphical Statistics, Vol.15, No.1, pp.1-25, 1996.
- 2) 北川源四郎: モンテカルロフィルタおよび平滑化について, 統計数理, Vol.44, No.1, pp.31-48, 1996.
- 3) Sato, T. and Kaji, K.: Adaptive Monte Carlo Filter and Structure identification, Proceedings of the first International Conference on Monte Carlo Simulation, at Monte Carlo, Monaco, 2000.