

三次元弾性加振台の振動と運動の制御

平松秀文¹・背戸一登²・小川信行³

¹ 修士 日本大学 理工学部機械工学科 (〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14)

² 工博 日本大学教授 理工学部機械工学科 (〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14)

³ 工博 文部科学省 防災科学技術研究所 (〒305-0006 茨城県つくば市天王台 3-1)

This paper presents a new method for motion and vibration controls of a three dimensional flexible shaking table. The shaking table is need of lightweight for reproducing the earthquake wave and the variety of input signal exactly. However, then the elastic modes appear on shaking table in operating frequency region. So it is important to control motion and vibration of shaking table simultaneously. The research purpose is to control the vibration and motion of the shaking table by using the reduced order modeling technique and LQ and LQI control theory. The modeling procedure and the control design are described. Control simulations on the discrete model are carried out to demonstrate the effectiveness of the method. Experimental work is shown to demonstrate a final verification.

Key Words : Motion control, Vibration control, Shaking table, Reduced-order mode, LQI control

1. 緒言

1995年1月17日に起きた兵庫県南部地震^[1]によって多くの建造物が崩壊するなどの大きな被害が出たことで、地震に対する建造物の安全性を問われるようになった。そこで建造物の耐震性などを正確に把握するために実寸の建造物を加振できる大型の加振台の建設^[2]が進んでいる。加振台は地震波や各種入力波を忠実に再現するために加振テーブル自身の軽量化が必要となる。しかし、軽量化に基づく問題点としてテーブル自体が加振された際、剛体モードだけでなく、テーブルの加振周波数範囲に振動モードを有することになる^[3]。つまり加振周波数範囲内に曲げやねじりモードが存在し、テーブル表面では加振入力通りに加振波が再現できたとしても、試験構造物の上方に離れるにつれて正しい加振できないことが起こる。

そこで本研究では三次元弾性加振台の模型を作成し、加振テーブルを平板構造物とみなし、その平板の低次元化物理モデル^[4]を作成する。そして、その物理モデルを用いて制御系を設計してLQ、LQI制御理論を用いて振動と運動を制御することを目的としている。

2. 制御対象構造物

Fig.1に本研究で用いる制御対象である3次元加振模型構造物を示す。加振テーブルと想定したこの平

板模型構造物は700×500×3 [mm]のアルミ板であり、柔軟な構造を有している。その平板構造物に垂直方向に加振可能にするボイスコイルモータを4カ所、水平方向の加振を可能にするアクチュエータを4カ所、また水平方向の安定のためさらに4カ所にリニアガイドのみを設置してある。また各アクチュエータと加振テーブルはピアノ線で連結されているので、すべての方向への加振を実現できる構造になっている。Fig.2に各アクチュエータの設置位置を示す。

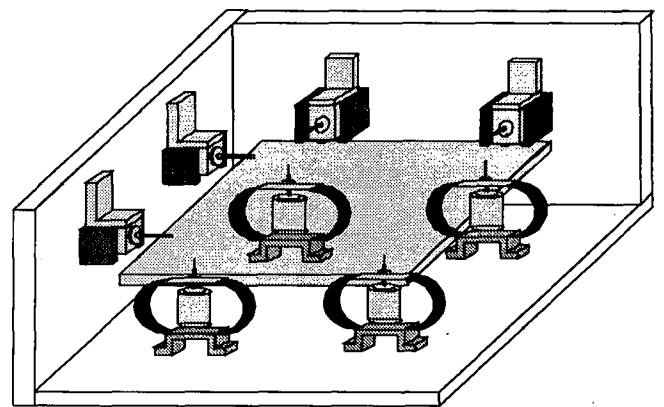


Fig.1 Control Object

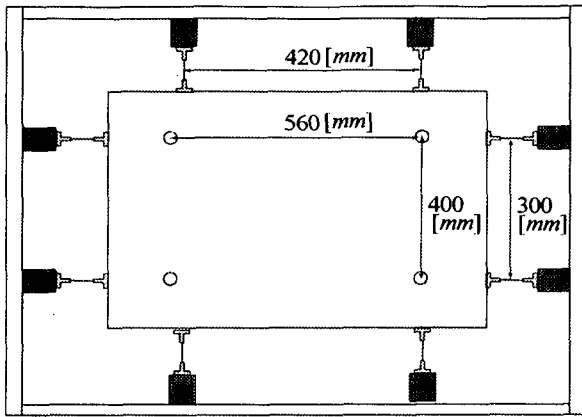


Fig.2 Displacement of Actuators

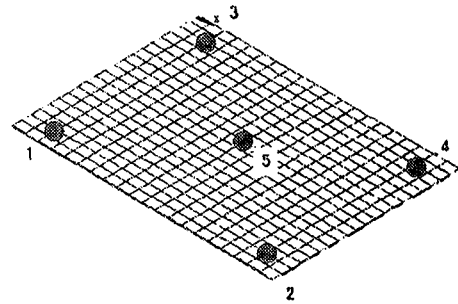


Fig. 4 Modeling Points

3. 低次元化物理モデル作成

本研究の目的である弾性体の振動制御を行うには、まず制御対象である平板構造物の振動特性を把握しておく必要がある。そこで本研究では、有限要素法を用いた解析ソフトANSYSを活用し、平板構造物の振動モード系及び各モードの固有振動数を求める。ここで、5次までの振動モード系と固有振動数をFig.4に示す。

ここでは50[Hz]の周波数範囲を振動制御することを試みる。その範囲に5個のモードが存在するから、それらを制御するには5質点で表されるモデルが必要である。そこで、物理モデルを作成する際の質点の位置をFig4に示す。

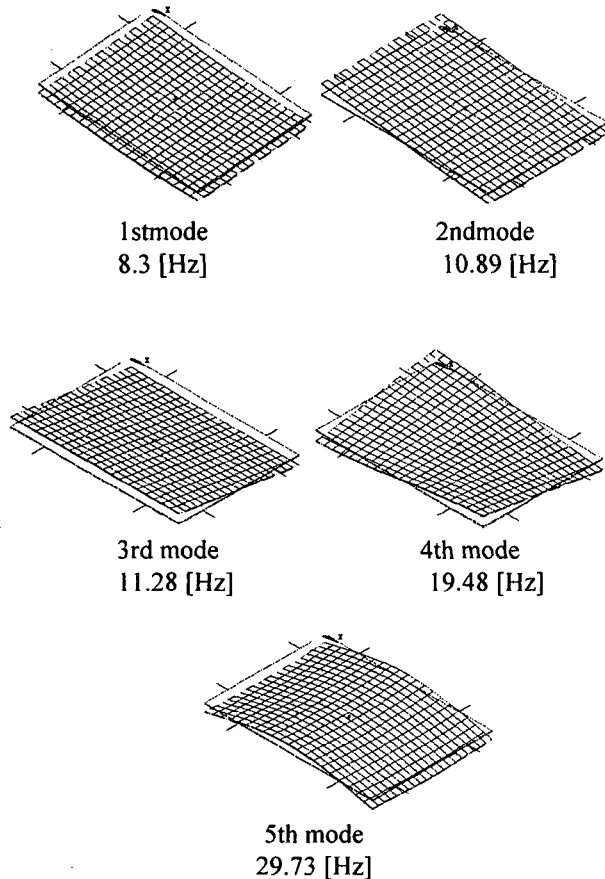


Fig. 3 Vibration Mode shapes

次に5質点モデル作成の手順を示す。

(3-1) 正規化モード行列の初期値の作成

モデリング点を定め、得られた振動モード形から各モードの成分 ϕ_{ij} を読み取る。ここで添字 i は質点番号、 j はモード次数を表す。

次に、読み取られたモード成分に対して正規化を行う。5つのモデリングの内の1点を選び、等価質量同定法を用いてその点の等価質量をもとめ m_1 とすると、次式によって1次モードの正規化モード成分が定まる。

$$\phi_{i1} = \phi_{i1} / \phi_{s1} / \sqrt{m_1} \quad (1)$$

ここに、添字 s は等価質量を同定した点を表す。他の4つのモードについても同様な手続きをとると式(2)のような正規化モード行列が構成される。ただし、これは仮のモード行列であって、集中定数系モデルから作られたモード行列ではないのでこれらの修正が必要である。

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} & \phi_{15} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} & \phi_{25} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \phi_{34} & \phi_{35} \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \phi_{43} & \phi_{44} & \phi_{45} \\ \phi_{51} & \phi_{52} & \phi_{53} & \phi_{54} & \phi_{55} \end{bmatrix} \quad (2)$$

(3-2) 正規化モードの修正

この正規化モード行列と物理座標系の質量行列 \mathbf{M} 、及び剛性行列 \mathbf{K} との間には以下の関係がある。

$$\mathbf{M} = (\Phi \Phi^T)^{-1} \quad (3)$$

$$\mathbf{K} = (\Phi^T)^{-1} \Omega^2 \Phi^{-1} \quad (4)$$

ここに、 Ω^2 は各モードの固有振動数の二乗を要素とする対角行列である。質量行列は質量連成がない限り対角行列となる。

ところが、式(4)の ϕ は仮の正規化モード行列であるから右辺は対角にはならない。つまり、式(2)を代入しただけでは式(3)は成立しないのである。式(2)

を仮のモード行列と呼ぶ由縁である。したがって、これを初期値として式(3)を満足するような修正をおこなう。

これは式(3)の右辺の非対角項を誤差と見立てて誤差ベクトル $\{\varepsilon\}$ を作り、モード成分の補正項 $\delta\phi_1, \delta\phi_2, \dots, \delta\phi_n$ から成る補正ベクトル $\{\delta\phi\}$ を定義して、次式によって誤差関数を零に近づける反復計算を行えばよい。

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} \right] \{\delta\phi\}^T = -\{\varepsilon\} \quad (5)$$

上式に最小ノルム解を使った一般化逆行列を適用すると補正ベクトルは次のように求めることができる。

$$\{\delta\phi\}^T = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} \right]^T \left[\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} \right] \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} \right]^T \right]^{-1} (-\{\varepsilon\}) \quad (6)$$

上式によって補正ベクトルを計算し、次の補正を行ってこれを反復計算すれば、誤差関数は零へと収束する。

$$\{\phi\} \leftarrow \{\phi\} + \{\delta\phi\} \quad (7)$$

そして、補正されたモード行列を式(3)、(4)式に代入すれば質量行列及び剛性行列がえられる。

以上の物理モデル作成法を用いて作成した制御対象構造物の5質点モデルをFig5に示す。

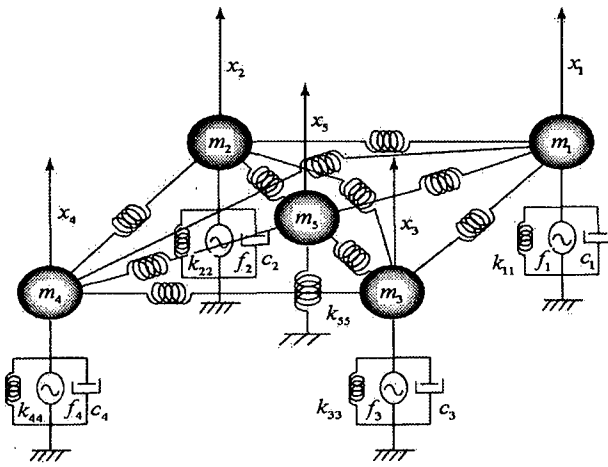


Fig. 5 Reduced order Model

各物理パラメータは以下に示す。各減衰係数 c_1, c_2, c_3, c_4 は各アクチュエータの減衰係数である。

$$m_1 = 0.4419, m_2 = 0.6246, m_3 = 0.6543 \\ m_4 = 0.5431, m_5 = 1.7611 \text{ [kg]}$$

$$k_{11} = 685, k_{12} = -199, k_{13} = -5, k_{14} = -2668, k_{15} = 6695 \\ k_{22} = 1738, k_{23} = -3394, k_{24} = -222, k_{25} = -8612 \\ k_{33} = 1845, k_{34} = -247, k_{35} = 8358, k_{44} = 818, k_{45} = -7980 \\ k_{55} = 5971 \text{ [N/m]} \\ c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0.6 \text{ [Ns/m]}$$

4. 制御系の設計

(4-1) 制御対象の状態方程式

質点1から質点4に取り付けられたアクチュエータの運動方程式は、

$$f_i = L_i \frac{dI_i}{dt} + R_i I_i \quad (8)$$

となる。ここで、 L_i は各質点に取り付けられている各アクチュエータのコイルのインダクタンス、 R_i は各アクチュエータの抵抗である。 I_i は各アクチュエータ内を流れる電流である。(8)式と前章の物理モデルより得られるアクチュエータの特性を組み込んだシステム全体の状態方程式と状態ベクトルは以下のようなものとなる。

$$\dot{X}_c = A_c X_c + B_c U_c \quad (9)$$

$$Y_c = C_c X_c \quad (10)$$

$$X_c = \{\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dot{x}_3 \ \dot{x}_4 \ \dot{x}_5 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ I_1 \ I_2 \ I_3 \ I_4\}^T$$

$$U_c = \{e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4\}^T$$

各マトリクス A_c, B_c, C_c を以下に示す。

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \text{diag} \left[-\frac{c_1}{m_1} \quad -\frac{c_2}{m_2} \quad -\frac{c_3}{m_3} \quad -\frac{c_4}{m_4} \quad 0 \right]$$

$$A_{12} = I_{5 \times 5}$$

$$A_{13} = \left[\text{diag} \left[-\frac{K a_1}{L_1} \quad -\frac{K a_1}{L_1} \quad -\frac{K a_1}{L_1} \quad -\frac{K a_1}{L_1} \right] \quad \mathbf{0}_{4 \times 1} \right]$$

$$A_{21} = -M^{-1}K$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} A & -k_{12} & -k_{13} & -k_{14} & -k_{15} \\ -k_{12} & B & -k_{23} & -k_{24} & -k_{25} \\ -k_{13} & -k_{23} & C & -k_{34} & -k_{35} \\ -k_{14} & -k_{24} & -k_{34} & D & -k_{45} \\ -k_{15} & -k_{25} & -k_{35} & -k_{45} & E \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= k_{11} + k_{12} + k_{13} + k_{14} + k_{15} \\ B &= k_{12} + k_{22} + k_{23} + k_{24} + k_{25} \\ \therefore C &= k_{13} + k_{23} + k_{33} + k_{34} + k_{35} \\ D &= k_{14} + k_{24} + k_{34} + k_{44} + k_{45} \\ E &= k_{15} + k_{25} + k_{35} + k_{45} + k_{55} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_{22} = \mathbf{I}_{5 \times 5}, \mathbf{A}_{23} = \mathbf{I}_{4 \times 5}$$

$$\mathbf{A}_{31} = \begin{bmatrix} \text{diag}[\mathbf{K}c_1 & \mathbf{K}c_2 & \mathbf{K}c_3 & \mathbf{K}c_4] \\ & \mathbf{0}_{1 \times 4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{32} = \mathbf{I}_{5 \times 4}$$

$$\mathbf{A}_{33} = \text{diag} \left[-\frac{R_1 + R_a}{L_1} \quad -\frac{R_2 + R_a}{L_2} \quad -\frac{R_3 + R_a}{L_3} \quad -\frac{R_4 + R_a}{L_4} \right]$$

$$\mathbf{B}_c = \left[\mathbf{0}_{4 \times 10} \quad \text{diag} \left[\frac{1}{L_1} \quad \frac{1}{L_2} \quad \frac{1}{L_3} \quad \frac{1}{L_4} \right] \right]^T$$

$$\mathbf{C}_c = [\mathbf{0}_{5 \times 5} \quad \mathbf{I}_{5 \times 5}]$$

\mathbf{A}_{33} はアクチュエータの特性を表しており、 \mathbf{A}_{31} と \mathbf{A}_{13} は各アクチュエータと物理モデルの相互関係を表している。各物理パラメータは以下に示す。

$$\mathbf{K}c_1 = \mathbf{K}c_2 = \mathbf{K}c_3 = \mathbf{K}c_4 = 41.7 \text{ [N/I]}$$

$$\mathbf{K}a_1 = \mathbf{K}a_2 = \mathbf{K}a_3 = \mathbf{K}a_4 = 1.2 \text{ [V} \cdot \text{s/m]}$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 1.2 \times 10^{-3} \text{ [H]}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 4.3 \text{ [\Omega]}, R_a = 7.0 \text{ [\Omega]}$$

(4-2) ローパスフィルタ

本研究では5次モードまでを制御対象として物理モデルを作成したが、無視した6次モード以降の高次のモードがスピルオーバーを起こす可能性がある。そこで本研究ではそのような高次のモードのスピルオーバーを回避するために二次系のローパスフィルタを用いることにする。ローパスフィルタはカットオフ周波数 $f_n = 35 \text{ Hz}$, 減衰率 $\zeta = 0.6$ とした。ローパスフィルタの状態方程式及び状態ベクトルは以下ようになる。

$$\dot{\mathbf{X}}_f = \mathbf{A}_f \mathbf{X}_f + \mathbf{B}_f \mathbf{U}_f \quad (11)$$

$$\mathbf{Y}_f = \mathbf{C}_f \mathbf{X}_f \quad (12)$$

$$\mathbf{X}_f = \{ \dot{x}_{f1} \quad \dot{x}_{f2} \quad x_{f1} \quad x_{f2} \}^T$$

マトリクス \mathbf{A}_f , \mathbf{B}_f , \mathbf{C}_f は以下のように表せる。

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{f1} & \mathbf{A}_{f2} \\ \mathbf{I}_{4 \times 4} & \mathbf{0}_{4 \times 4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{f1} = \text{diag}[-2\zeta\omega_n \quad -2\zeta\omega_n \quad -2\zeta\omega_n \quad -2\zeta\omega_n]$$

$$\mathbf{A}_{f2} = \text{diag}[-\omega_n^2 \quad -\omega_n^2 \quad -\omega_n^2 \quad -\omega_n^2]$$

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} \text{diag}[\omega_n^2 \quad \omega_n^2 \quad \omega_n^2 \quad \omega_n^2] \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_f = [\mathbf{0}_{4 \times 4} \quad \mathbf{I}_{4 \times 4}]$$

(4-3) 拡張システム

ここでは、制御対象にローパスフィルタを組み込んだ拡張したシステムを示す。Fig 6 に拡張システムのブロック線図を示す。フィードバックゲイン \mathbf{K}_c 、 \mathbf{K}_f はLQ制御理論を用いて求める。

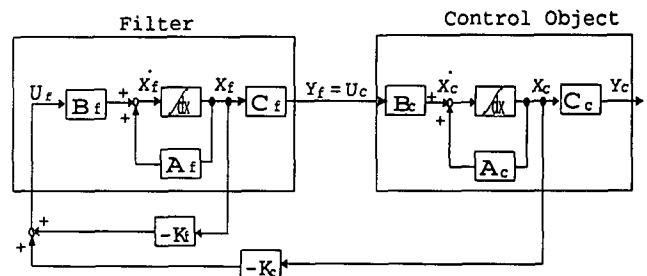


Fig. 6 Block Diagram of Augmented System

Fig. 6 から、状態方程式と状態ベクトル、各マトリクスは以下ようになる。

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (13)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} \quad (14)$$

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_f \\ \mathbf{X}_c \end{Bmatrix}, \mathbf{U}_{cc} = \mathbf{U}_f$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_f & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}, \mathbf{B} = [\mathbf{B}_f \quad \mathbf{0}]^T, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_c \end{bmatrix}$$

(4-4) LQI 制御理論

ここではLQ制御理論をサーボ問題に適応したLQI制御理論を用いて加振テーブルの振動と運動の制御を行う。Fig11にLQI制御のブロック線図を示す。

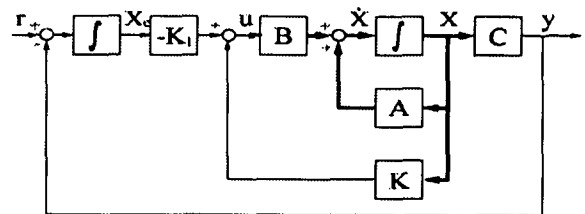


Fig 11. Block Diagram of LQI Control System

Fig 11のブロック線図より状態方程式及び状態ベクトルは以下のようになる。

$$\dot{X}_{cc} = A_{cc}X_{cc} + B_{cc}U_{cc} \quad (15)$$

$$Y_{cc} = C_{cc}X_{cc} \quad (16)$$

$$X_{cc} = \begin{Bmatrix} X \\ X_e \end{Bmatrix}$$

$$A_{cc} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, B_{cc} = [B \ 0]^T$$

ここで、2つのフィードバックゲイン K と K_1 は評価関数

$$J = \int_0^{\infty} \{X_{cc}^T Q X_{cc} + U_{cc}^T R U_{cc}\} \quad (17)$$

を最小にさせるレギュレータ問題として求めることが出来、フィードバックゲイン K, K_1 は

$$K_a = [K \ K_1] = R^{-1} B_{cc}^T P \quad (18)$$

となる。ここで、 P は Riccati 方程式のである。

5. シミュレーション

以上より得られた制御系を数値解析ソフト MATLAB を用いシミュレーションを行う。質点1を加振したときの質点1の周波数応答と時間応答をそれぞれ Fig7 と Fig8 に示す。制御理論は LQ 制御を用いた。

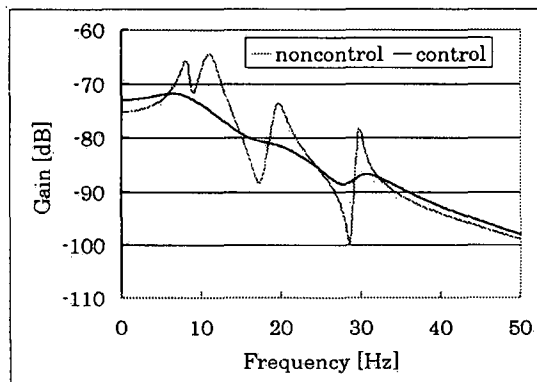


Fig. 7 Frequency Responses (simulation)

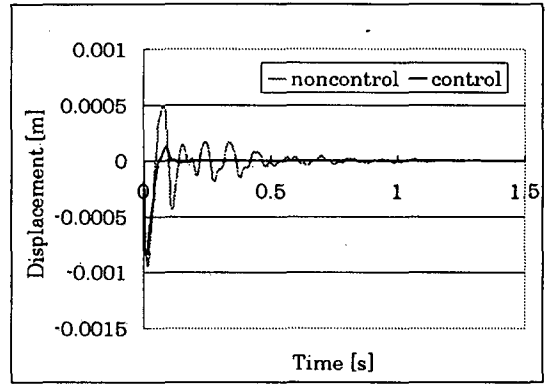


Fig. 8 Time Responses (simulation)

シミュレーションの結果より良好な制御結果が得られることが分かる。

6. 実験

(6-1) 実験装置

本研究で用いた実験装置を Fig9 に示す。各質点の変位をレーザーセンサーによって読み取り A/D ボードを介してコントローラに入れる。コントローラ内で各質点の変位を数値微分することにより各質点の速度を求めそれらの状態量にフィードバックゲインを掛け制御力を算出する。算出された制御力にローパスフィルターを通し、D/A ボード、Amp を介しアクチュエータで出力する。

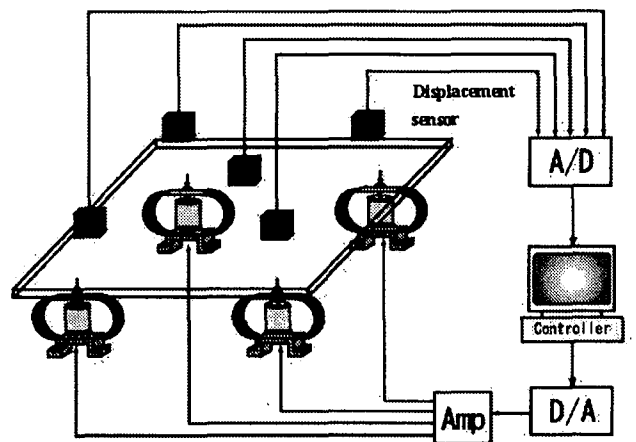


Fig. 9 Experimental setup

(6-2) 実験結果

Fig9 に示される実験装置を用い、LQ 制御理論を用いた振動制御実験を行ったときの周波数応答と時間応答をそれぞれ Fig10 と Fig11 に示す。

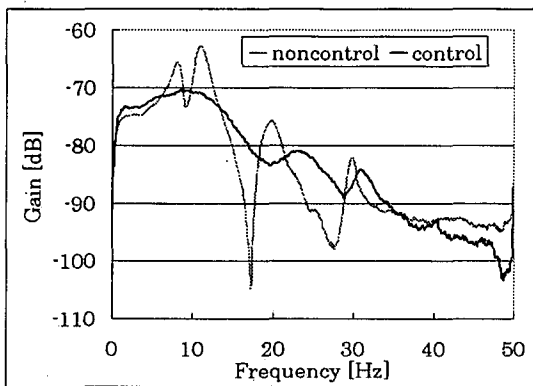


Fig. 10 Frequency Responses (experiment)

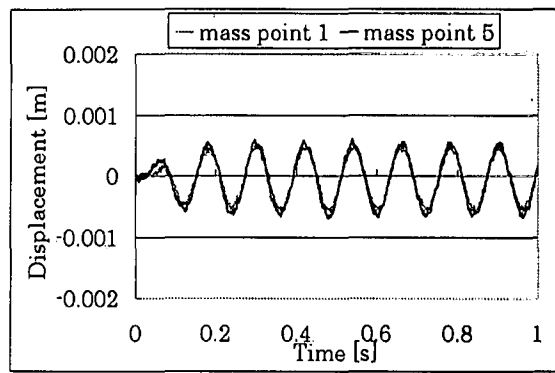


Fig 13. Time Response (control)

実験結果より、LQI 制御理論を用いることで振動を制御しつつ運動を制御できていることが分かる。

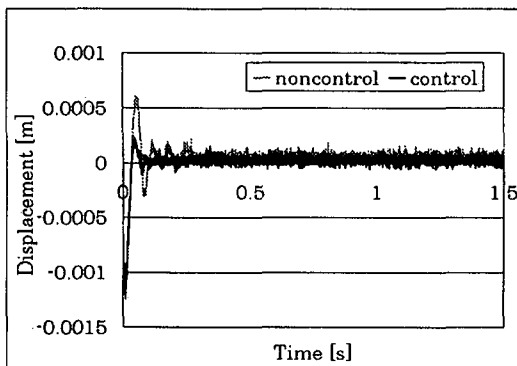


Fig. 11 Time Responses (experiment)

7. 結論

低次元化物理モデル作成法を用いることで連続系の構造物の物理モデルを容易に作成することが出来た。そしてその物理モデルを用いることで制御系を簡単に設計することができ、また LQ、LQI 制御理論を用いたシミュレーションと実機において良好な制御結果を得ることが出来た。

実験結果より、周波数応答及び時間応答においてシミュレーションと同様に良好な制御結果が得られることが分かる。

次に LQI 制御理論を用いた振動と運動の制御を行ったときの実験結果を示す。1 次の固有振動数である 8.3[Hz]で加振テーブルを加振した時の質点 1 と質点 5 の時間応答を示す。Fig12 は非制御時の時間応答、Fig13 は制御時の時間応答となっている。灰色の線が質点 1、黒の線が質点 5 の応答である。

参考文献

- [1] JSME (ed.), *Report on the Hanshin-Awaji Earthquake Disaster-Damage and Failure of Machines and Industrial Equipment*, JSME, (1999) (in Japanese).
- [2] 村 達也、清水 信行、小川 信行、振動台加振手法研究用の非弾性挙動実現模型の製作とモデル化、日本機械学会、D & D, CD-ROM, No. 610 (2000)
- [3] Mitsubishi Heavy Industries (ed.), *Report on the computational simulation of Full-scale Three-dimensional Shaking Table, Report for technical committee of Full-scale shaking table facilities*, MHI (2000) (in Japanese).
- [4] 背戸一登、光田慎治、不可制御・不可観測性の活用による弾性構造物の低次元物理モデルの作成法と振動制御法、日本機械学会論文集 C 編 57-542, 1991, pp. 3393-3399

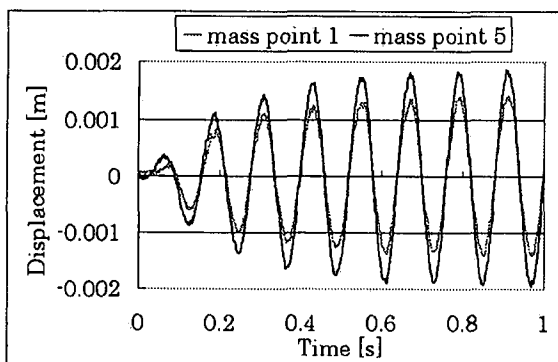


Fig. 12 Time Response (non-control)