

## 2. ものの揺れ方

### 2.1 はじめに

構造物の地震応答を捉えるにあたっては、ものが揺れる場合の挙動を理解する必要がある。本章では、「振動」という現象の考え方について、基本的な事項を説明する。

### 2.2 ものの揺れをどう解析するか

#### 2.2.1 振動モデル

一般に力学的な現象や工学的な設計のプロセスにおいては、対象物の実物の挙動を再現し、現象の理解・把握ならびに計算ができる力学モデルが必要である。力学モデルの設定においては、様々なレベルの複雑さを持つモデルが提示可能である。例えば橋梁構造物の弾性挙動だけに話を限っても、有限変形弾性論による3次元モデル、微小変形弾性論による3次元モデル、材料力学による1次元モデル、有限要素法による数値モデルなどが考えられる。全般的には、精密なモデルであるほど実物挙動への追従が良いが、複雑で解くのに手間がかかるという傾向があるであろう。

力学モデルというものは、実物の特定な入出力関係、例えば与えられた荷重に対する橋桁のたわみのような量を、工学的許容範囲で再現できるシステムを言う。すなわち、力学モデルは、実物が示すある特定の入出力関係を説明できれば良いのであって、異なる状況下で実物が示すであろう入出力関係まで説明できなくても良い。モデルの設定は、今どのような入出力関係に関心があるかで決まる。

モデルのパラメータがどのように精密に設定されようと、モデルはモデルであって実物ではない。したがって、モデルの出力に誤差が含まれることは避けられない。問題は、その誤差が工学的許容範囲内にあるかどうかに着目する。今、2つの力学モデルがあって、そのどちらも工学的許容範囲に入っているとすると、ただし、片方のモデルの出力は精度は良いが解くのに大変手間がかかり、他方は簡単に出力を計算することができるとする。この場合、解析や設計に有用な後者のモデルを用いる方が有利である。これは「けちの原理」とも呼ばれる。

ものの揺れ、すなわち構造物の動的応答の解析では、地震時に構造物が示すであろう挙動を表現する力学モデル、あるいは振動モデルと呼ぶものが必要となる。そして、この振動モデルの設定に関しては、これまで述べた力学モデルについての要請がそのまま当てはまるのである。

図-2.2.1に示すような剛な基盤上に建てられたラーメン構造を考えよう。この構造物が地震動を受けている時のある瞬間での弾性変形を示すものとする。図-2.2.1(a)の状態を記述する事は、部材変形での断面平面保持の仮定や軸方向変形無視の仮定を容認したとしても、かなり煩雑になる。例えば、はりの運動を考えてみても、はり全体として左右に振動すると同時に、曲げによる部分的な上下運動もする。したがって、はり自重および荷重

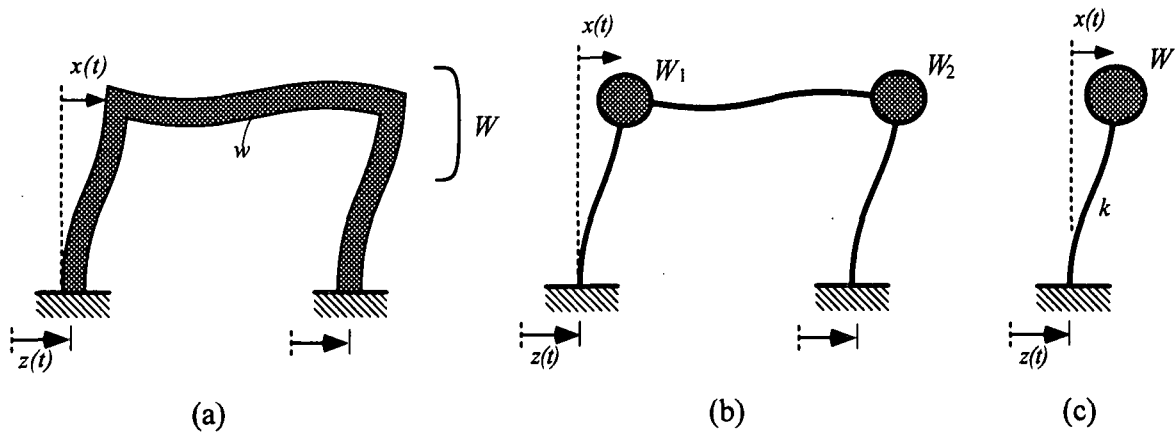


図-2.2.1 振動モデルの考え方の例

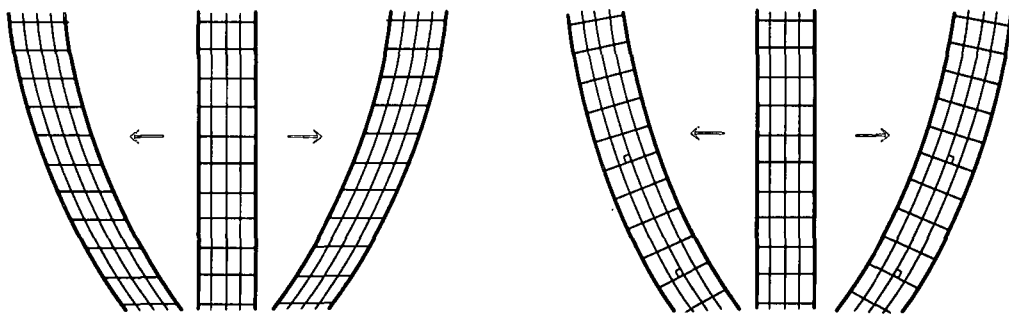


図-2.2.2 せん断振動と曲げ振動

による慣性力は、水平に作用するとともに、部分的には垂直にも作用し、曲げによる回転慣性まで生じる。これらの慣性力に釣り合う抵抗力もまた、それなりの記述をしなければならない。柱についても同様である。図-2.2.1のような簡単な構造物であれば、解析しようと思えば不可能なことではない。しかし、例えば多層多スパン架構になれば、このような記述の方法では煩雑過ぎて実用上の計算がむずかしくなる。さらに、実際に発生する振動現象の本質的な理解には複雑過ぎて適さないものとなる。そこで、もう少し実用に耐えるモデルを作るために、今、何に関心があるのかを整理してみよう。

今の場合、この構造物がある地震動を受けるとき、その応答変位の最大値を求めることが課題であるとしよう。さらに簡単な、弾性棒で質点を支えた図-2.2.1(c)のモデルが考えられる。このモデルは応答変位のみを現出できるように工夫されたもので原型と全く異なる。この場合、水平方向の復元力（ばねによる反発力）は図-2.2.1(b)のモデルと全く同じに設定する。従って、全質量を支えている弾性棒に生じるせん断力は、図-2.2.1(b)のモデルの2本の柱に生じているせん断力の和となる。このような図-2.2.1(c)のモデルは通常、集中質点系モデルと呼ばれている。

これまでの記述での振動モデルは、まだ現実の構造物との対応に乏しい。なぜならば、減衰が考慮されていないため、この式の表している運動は地動が終息しても止まらない。また、線形ばねを仮定していることから、どのように大きな入力があっても、復元力は常に弾性である。これらは地震時に実際の構造物が示す挙動とは異なっていることは明らかである。必要に応じて改善を加え、より現実に近い振動モデルを使用することが必要であ

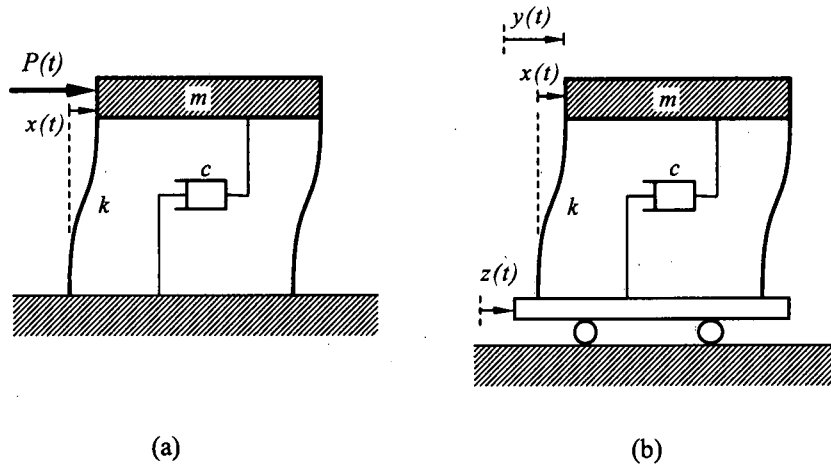


図-2.2.3 入力による問題の分類

る。また、部材の振動のモデル化として、図-2.2.2に示すようなせん断振動と曲げ振動、ねじれ振動などがあり、これらより現実の挙動を表すようなモデルを選択する必要がある。

## 2.2.2 揺れを起こすもの

構造物が振動する原因は、次の2つに大別することができる。1つは構造物の各部に直接外力が作用している場合である。例えば、風、波浪、橋における自動車や列車の走行などである。他の一つは地震のように構造物の設置している基盤面が移動する場合である。この時、構造物には外力は直接作用しているように見えないが、実は地震力が作用している。地震力を含めこれらの外力は、大きさおよび方向が時間とともに変化するため、動的外力と呼ばれる。図-2.2.3にこの両者の場合を分けて示す。(a)の $P$ は動的外力であり、(b)は地震による基盤加振のケースである。

例えば地震による振動の場合、地面の揺れが止まっても、構造物の揺れはしばらく残る。この状態が自由振動の例であり、地面の揺れとともに構造物が揺れている状態が強制振動に対応する。

自由振動状態において構造物の安全性が問題となる場合は、衝撃的な外力を除いては極めて少ない。しかし、構造物の振動のメカニズムを理解するための基礎となること、振動でよく用いられる固有な用語が自由振動状態で定義される、等の理由によりまず自由振動に注目する。

## 2.3 1自由度系の線形応答

### 2.3.1 1質点系の振動

ここでは、図-2.3.1の場合について考える。質点の元の位置（平衡状態）からの変位を $x$ とし、この変位を時間1階微分した速度を $\dot{x}$ 、2階微分した加速度を $\ddot{x}$ で表す。今、1質点系の質量に作用する力はバネによる復元力 $kx$ 、およびダッシュポットによる粘性減衰力 $c\dot{x}$ である。これらが質点の慣性力とともに釣り合っているという条件を式で書けば、次のよ

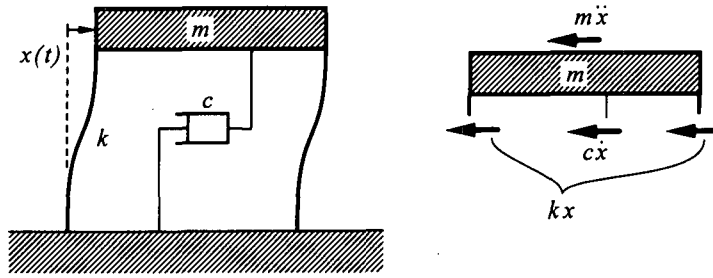


図-2.3.1 1 質点系の自由振動

うになる。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.1)$$

この時間に関する 2 階微分方程式は運動方程式と呼ばれる。構造物の揺れ、すなわち振動挙動を解明するためには、このような微分方程式の解を得なければならない。

### 2.3.2 自由振動と減衰

さて、自由振動の解を次の形におく。

$$x = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \quad (2.2)$$

これを式(2.1)に代入することにより

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.3)$$

が得られる。

ここで、臨界減衰  $c_c$  (critical damping) を定義し

$$\frac{c_c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0 \quad (2.4)$$

が成り立つものとする。ここに、 $\omega_0$  は非減衰固有円振動数である。したがって、

$$c_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_0 \quad (2.5)$$

この臨界減衰  $c_c$  を用いて、

$$h = \frac{c}{c_c} \quad (2.6)$$

により無次元数  $h$  を定義する。この  $h$  を減衰定数 (damping ratio) と呼ぶ。これらを用いれば、式(2.1)は

$$s_{1,2} = (-h \pm \sqrt{h^2 - 1}) \omega_0 \quad (2.7)$$

と表すことができる。

図-2.3.2 に示すように、減衰定数  $h$  の値により解の性質が変化する。特に  $h < 1.0$ 、 $h = 1.0$ 、 $h > 1.0$  の 3 ケースの値の範囲による分類が大きな意味を持つが、構造物の振動問題では、

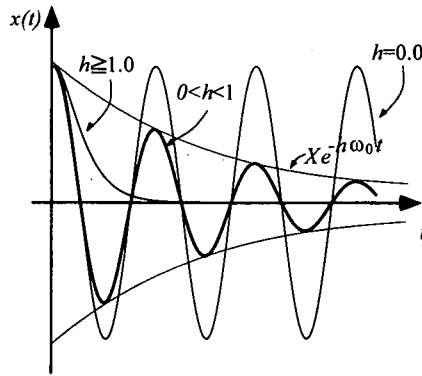


図-2.3.2 1 質点系の自由振動解

$h < 1.0$ となるケースが重要である。この時、 $s_{1,2}$ は虚部を含む複素数となり、式(2.1)は振動する解を表している。また、定数  $A$ 、 $B$ は問題の初期条件により定まる複素係数である。

式(2.7)を式(2.2)に代入すれば、結局次式のような図-2.3.2に示す減衰自由振動の解が得られる。

$$x = X e^{-h\omega_0 t} \sin(\sqrt{1-h^2} \omega_0 t + \phi)$$

振幅が時間とともに減少する振動であり、減衰係数とその振幅の減少の速さを表していることがわかる。この振動の振動数は

$$\omega_d = \sqrt{1-h^2} \omega_0 \quad (2.8)$$

で表され、この $\omega_d$ は減衰固有円振動数と呼ばれる。これは $\omega_0$ よりも小さな値となるが、通常の減衰定数の値の範囲では、大きな違いは現れない。特に $h=1$ の場合には振動状の解が現れるかどうかの境界であることから、この状態が臨界減衰を表している。

実際の構造物の減衰定数の値を決定することは、一般的には難しい問題である。過去に行われた試験・実験あるいは地震観測などから、土木構造物については経験的におよそその値が推定されている。例えば橋梁の上部構造では0.01から0.05程度であり、基礎では0.1から0.4程度の範囲である。

図-2.3.3より分かるように、振動周期を $T$ とすると、減衰自由振動においては振幅は各サイクル毎に $e^{-h\omega_0 T} : 1$ の割合で等比級数的に減少していく。この比率を用いて、減衰定数を推定することができる。

次のように算出される値 $\delta$ のことを対数減衰率(logarithmic decrement)と呼ぶ。

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \frac{e^{-h\omega_0 t_1}}{e^{-h\omega_0(t_1+T)}} = \ln e^{h\omega_0 T} = h\omega_0 T \quad (2.9)$$

ここに

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \text{周期} \quad (2.10)$$

である。 $h$ の値が十分1よりも小さい場合には、

$$\delta = \frac{2\pi h}{\sqrt{1-h^2}} \approx 2\pi h \quad (2.11)$$

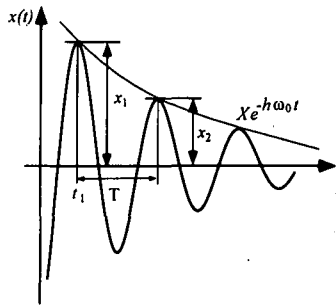


図-2.3.3 減衰振動と対数減衰率

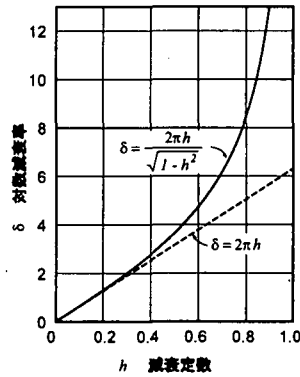


図-2.3.4 対数減衰率と減衰定数の関係

という関係があることから、対数減衰率を実験などから求めることにより構造物の減衰定数  $h$  を測定することができる。この関係を図-2.3.4に示す。

同様に  $n$  番目の変位のピークの大きさを  $x_n$  とすれば、対数減衰率は次のように定めることもできる。

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_0}{x_n}$$

### 2.3.3 調和入力に対する応答

#### (1) 強制外力の場合

図-2.3.5に示すように、1自由度系が正弦波状に変動する外力により加振される場合を

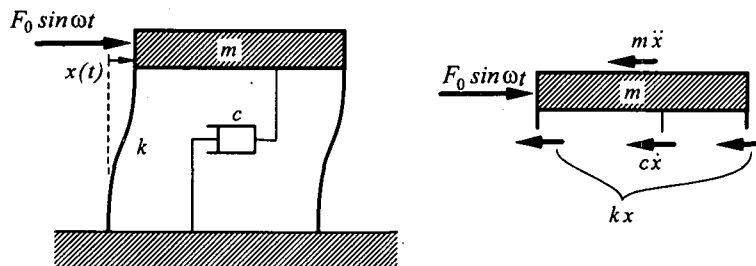


図-2.3.5 外力による1質点系の強制振動

考える。1質点系に対する調和入力の場合の応答を記述する運動方程式を前節と同様に導けば、次のようになる。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (2.12)$$

ここで、応答の解  $x(t)$  は、一般解（自由振動）と特解（強制振動）の2つの項の和からなることが知られている。自由振動を表現する一般解はすでに前節で説明されたものである。強制振動応答を表す特解を求めるため、次のように解の形式を仮定する。

$$x = X e^{i\omega t}, \quad f = F e^{i\omega t} \quad (2.13)$$

ただし、 $X$ 、 $F$ は複素数の定数であり、 $|X| = X_0$ 、 $|F| = F_0$ である。これらを式(2.12)に代入して整理すると、

$$X = \frac{F}{(k - m\omega^2) + ic\omega} \quad (2.14)$$

したがって、この特解を  $x = X_0 \sin(\omega t - \phi)$  の形で表現すれば、

$$X_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (2.15)$$

$$\tan \phi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (2.16)$$

である。ゆえに、調和外力応答を記述する式は次のように表される。

$$x(t) = X_1 e^{-h\omega_0 t} \sin(\sqrt{1 - h^2} \omega_0 t + \phi_1) + \frac{F_0 \sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (2.17)$$

ここに、 $X_1$ および $\phi_1$ は初期条件により定まる定数である。2つの項のうちの強制振動の周期は、起振力の周期と同じ  $2\pi/\omega$  である。実際の強制振動においては、摩擦その他の減衰力があるので、自由振動項は時間  $t$  とともにしだいに減衰し、上式において  $t \rightarrow \infty$  とおくとゼロとなる。したがって、これは調和入力に対する定常状態の応答を表している。

$$X_0 = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}} \quad (2.18)$$

$$\tan \phi = \frac{c\omega/k}{1 - \frac{m\omega^2}{k}} \quad (2.19)$$

ここで、静的荷重  $F_0$  による静的変位が

$$X_{static} = \frac{F_0}{k} \quad (2.20)$$

となることから、上記の応答の振幅  $X_0 = |X|$  の静的変位  $X_{static}$  に対する比  $A_1$  を求めると、次式のようなになる。

$$A_1 = \frac{X_0}{X_{static}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2h \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]^2}} \quad (2.21)$$

この  $A_1$  を動的応答倍率と呼び、周波数軸に対して図-2.3.6に示したものは共振曲線と呼ばれる。また、位相  $\phi$  を同様に求めると

$$\tan \phi = \frac{2h \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (2.22)$$

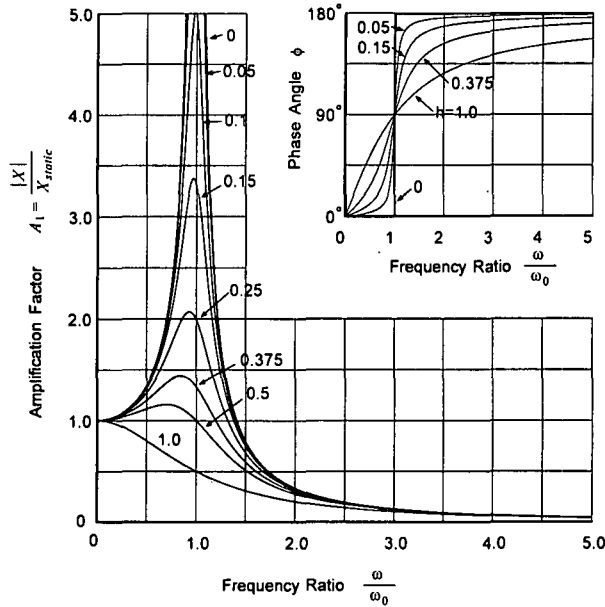


図-2.3.6 動的応答倍率と位相曲線

となる。 $\phi$ を同様に図-2.3.4に示したものは位相曲線と呼ぶ。この図に示されているように、 $0 \leq \omega \leq \omega_0$ の範囲内では $\omega$ が増大するにつれて増大し、 $\omega/\omega_0 = 1$ 、すなわち起振力の振動数が1自由度系の自由振動数に近づいたとき、強制振動の振幅は著しく増大する。この状態を共振(resonance)という。

また、 $\omega > \omega_0$ の範囲では、 $\omega$ が大きくなるにつれて動的応答倍率は小さくなり、 $\omega_0$ よりはるかに大きくなると0に近づくという傾向を示す。

また、位相曲線に着目すると、共振点 $\omega = \omega_0$ を境として位相が0から $\pi$ まで変化して反転する性質がある。

また、共振時の応答振幅は、共振曲線のピークすなわち $\omega/\omega_0 = 1$ の時の値が

$$\frac{X_0}{X_{static}} = \frac{1}{2h} \quad (2.23)$$

与えられることもわかる。したがって、減衰定数は共振応答が発生した場合における応答の大きさに直接関連した特性値であり、特に減衰の小さな構造物に共振が発生すると極めて危険であることを意味している。

## (2) 基盤入力の場合

さらに、1自由度系の支点が地震によって変位するような基盤入力の場合について考える。図-2.3.7で示されるように

$$\begin{array}{ccccc}
 y & = & z & + & x \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{絶対変位} & & \text{地盤変位} & & \text{相対変位}
 \end{array}$$

であるから、運動方程式は

$$m(\ddot{x} + \ddot{z}) + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.24)$$



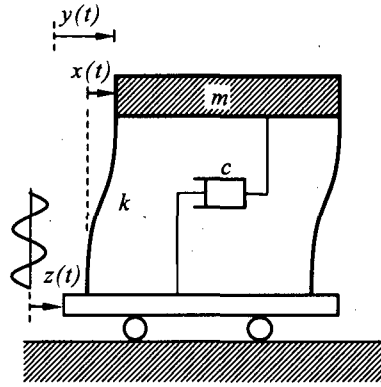


図-2.3.7 基盤加振による1質点系の強制振動

あるいは

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{z} \quad (2.25)$$

となる。これは、地盤加速度に1自由度系の質量を乗じた慣性力が逆方向に作用するとみなすことにより基盤入力の場合の解析が出来ることを示している。

支点の変位が円振動数 $\omega$ 、振幅 $Z_0$ の正弦波であるとしてこれを式(2.25)に代入すれば、ここで解くべき運動方程式が得られる。

絶対変位は絶対加速度と同一の式で展開できるため、ここでは両者をまとめて展開することができる。相対変位を $x$ とすれば、絶対変位は $y = x + z$ と表されるので、 $x = Xe^{i\omega t}$ 、 $z = Ze^{i\omega t}$ 、と置けば、

$$X = \frac{-m\omega^2 Z}{(k - m\omega^2) + ic\omega} \quad (2.26)$$

より

$$X + Z = \frac{k + ic\omega}{(k - m\omega^2) + ic\omega} Z \quad (2.27)$$

となることから、

$$y(t) = x(t) + z(t) = A_2 Z_0 \sin(\omega t + \psi) \quad (2.28)$$

ここに

$$A_2 = \frac{Y_0}{Z_0} = \sqrt{\frac{k^2 + i\omega c}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \sqrt{\frac{1 + (2h\omega/\omega_0)^2}{[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 + (2h\omega/\omega_0)^2}} \quad (2.29)$$

$$\tan \phi = \frac{mc\omega^3}{k^2[1 - (\omega/\omega_0)^2] + (c\omega)^2} = \frac{2h(\omega/\omega_0)^3}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + (2h\omega/\omega_0)^2} \quad (2.30)$$

が得られる。同様に、絶対加速度応答の定常解も同様に

$$\ddot{y}(t) = \ddot{x}(t) + \ddot{z}(t) = -A_2 \omega^2 Z_0 \sin(\omega t + \psi) \quad (2.31)$$

となる。この場合の動的応答倍率 $A_2$ は、応答の絶対変位および絶対加速度が、それぞれ支点の変位と加速度の何倍になるかを示すものである。図-2.3.8に動的応答倍率 $A_2$ に基づく共振曲線、および位相曲線を示す。これらは、強制外力加振の場合の共振曲線および位相曲線と類似しているものの、同一ではないことに注意すべきである。

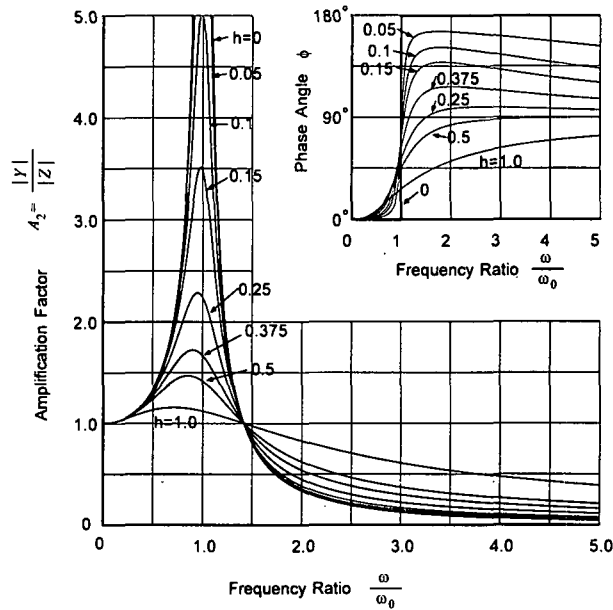


図-2.3.8 基盤加振時の動的応答倍率と位相曲線

特に地震時応答を考える場合には地震による慣性力は絶対加速度に比例する量であることから、重要な意味を持っている。特に、応答倍率が、定常応答時の応答と入力加速度振幅の比を与えている。すなわち、

$$\frac{\ddot{y}_{max}}{\ddot{z}_{max}} = A_2 \quad (2.32)$$

これより、入力の振動数が $\omega \ll \omega_0$ の場合には $A_2$ は1付近の値を取ることから、入力加速度による荷重は静的荷重によるものと同様であることがわかる。これに対し、 $\omega$ が $\omega_0$ に近い場合には、動的な効果が静的な荷重効果を大きく上回ることとなり、振動が非常に重要となる状態となる。また、 $\omega \gg \omega_0$ の場合には、逆に $A_2 < 1$ となることから、入力加速度に比べて応答加速度が低減されることになる。

このように、構造物を故意に長周期化して $\omega_0$ を小さくすることにより応答倍率、すなわち応答加速度・地震力を抑えるという手法が方法論として考えられることになる。いわゆる柔構造や免震設計などの概念は、この理論に基づくものと見ることができる。ただし、 $\omega \gg \omega_0$ の条件を十分に満足していない場合、周期の長い構造物は応答変位が大きくなる傾向があることから、十分に考慮することが必要である。

なお、

$$m\ddot{y} = -k(y - z) - c(\dot{y} - \dot{z}) \quad (2.33)$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = kz + c\dot{z} \quad (2.34)$$

のように絶対変位 $y$ について表現した運動方程式を用いても、同じ結論が得られる。

上の共振曲線の場合、 $\omega/\omega_0 = 1$ の時の応答倍率は次式ようになる。

$$\left| \frac{Y}{Z} \right| = \sqrt{\frac{1 + 4h^2}{4h^2}}$$

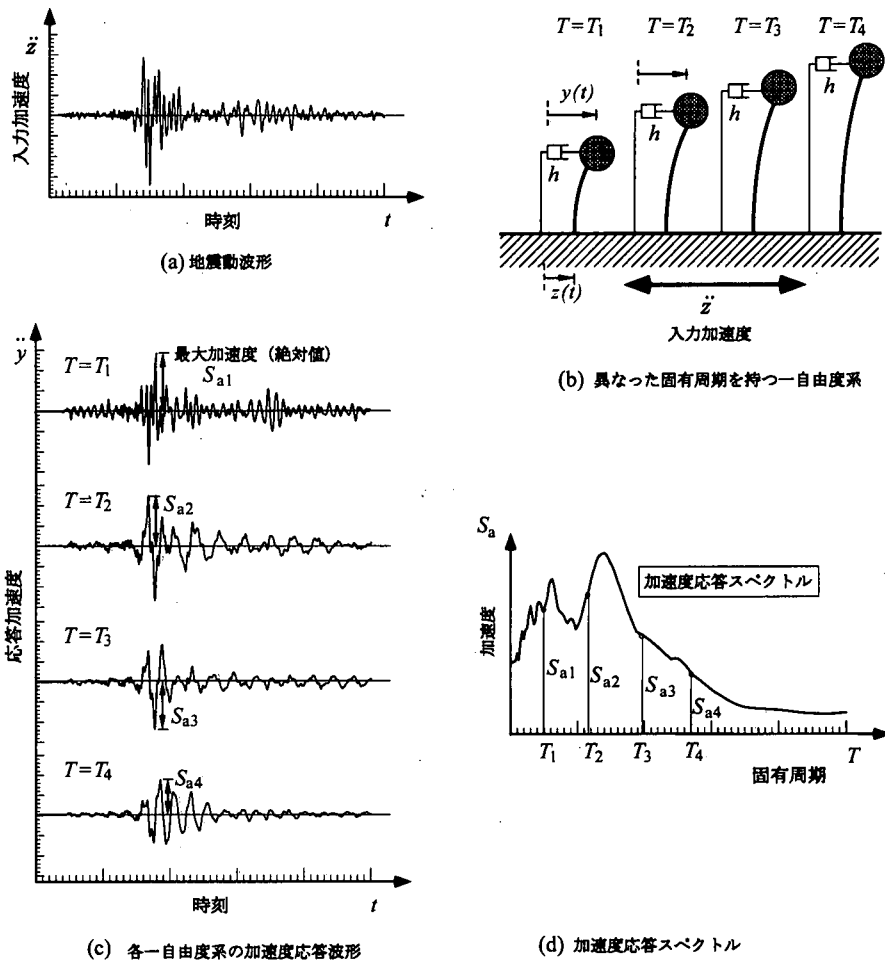


図-2.3.9 地震応答スペクトル

### 2.3.4 地震応答スペクトル

これまで調和入力、すなわち正弦波入力の場合について考えてきたが、地震波は不規則な波形をしており、その中には種々の周波数成分が含まれている。振動モデルの応答はその固有振動数と入力に含まれている周波数成分により大きく変化する。応答スペクトルは、ある地震波に対する1自由度系の最大応答の形で構造物の応答の大きさを評価するためのものである。

図-2.3.9は応答スペクトルの概念を図示したものである。基盤の上に減衰が等しく固有周期の異なる1自由度系を固定し、この基盤が特定の地震波により動かされるものとする。このとき、各々の1自由度系が応答を示すが、この時の応答加速度の最大値と各1自由度系の固有振動数の関係を図示すると、(d)に示すような曲線が得られる。これを加速度応答スペクトルという。同様に変位応答、速度応答について得られる曲線は、それぞれ変位応答スペクトル、速度応答スペクトルと呼ぶ。

実際の応答スペクトルの計算においては、少しずつ1自由度系の固有振動数を変化させながら、計算機により基盤入力の場合の運動方程式に対して数値的な逐次時間積分を行い、時刻歴応答を求める方法を用いる。設定した減衰定数の値により異なる応答スペクトルが得られるが、一般に  $h = 0.05$  の場合を標準的に計算することが多い。

## 2.4 多自由度系の線形応答

橋梁などの動的解析を行うには、単純な橋脚を解析する場合を除き、多自由度系にモデル化するのが一般的である。多自由度系の運動方程式は  $N$  自由度系であれば  $N$  元の連立方程式を解くことになる。計算機の発達でこのような計算も容易にできるようになってきた。しかし、多自由度系の応答を理解する上で、固有値解析(モード解析法)の意義は大きく、この点について概説する。

### 2.4.1 運動方程式

#### (1) 自由度

3次元空間に存在する1個の物体は  $x,y,z$  方向の並進運動と、 $x,y,z$  三軸まわりの回転運動が可能である。このときの物体の自由度は「6」であるという。自由度は力学系の運動を記述する座標の数と考えられる。しかし座標間に拘束条件が存在する場合には、自由度は減少する。例えば図-2.4.1 に示すように紙面内を運動している単振り子を考える。質点(おもり)の位置は  $x,y$  座標系で見れば自由度は2に見えるが、 $x_1$  と  $y_1$  の間には  $x_1^2 + y_1^2 = l^2$  なる関係が存在するので自由度は1となる。この場合、鉛直方向からの振れ角  $\theta$  で運動を考えれば、 $x_1 = l \sin \theta$ 、 $y_1 = l \cos \theta$  となり、座標は  $\theta$  の1つで足りることが分かる。このような独立な座標を一般座標という。

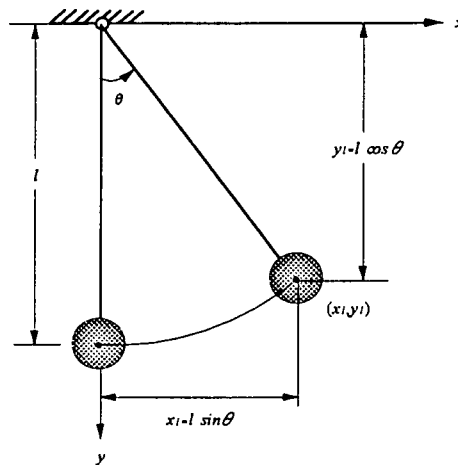


図-2.4.1 単振り子の自由度

#### (2) 運動方程式

運動方程式を導く方法としては、いくつか考えられるが、ここではラグランジェの運動方程式を用いる方法を説明する。これは一般座標(自由度)で表した振動系の運動方程式の作成に利用される。

$N$  自由度系の一般座標が  $q_s$  ( $s=1,2,\dots,N$ ) とする。その運動エネルギーを  $K$ 、ひずみエネルギーを  $V$ 、一般座標  $q_s$  に対する一般力を  $Q_s$  とすると、一般座標  $q_s$  に対して以下の関係が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_s} + \frac{\partial V}{\partial q_s} = Q_s \quad (2.4.1)$$

$$s=1,2,\dots,N$$

この式をラグランジェの運動方程式と呼ぶ。地震動が作用する構造物の解析では外力  $Q_s$  は慣性力となる。  $K-V=L$  とおけば、(2.4.1)式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} = Q_s \quad (2.4.2)$$

この  $L$  をラグランジェ関数という。

図-2.4.2 に示す構造物を例にとり、ラグランジェの運動方程式を利用して多自由度系の運動方程式を求める。上部工および基礎の水平変位  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\theta$  を一般座標とする。

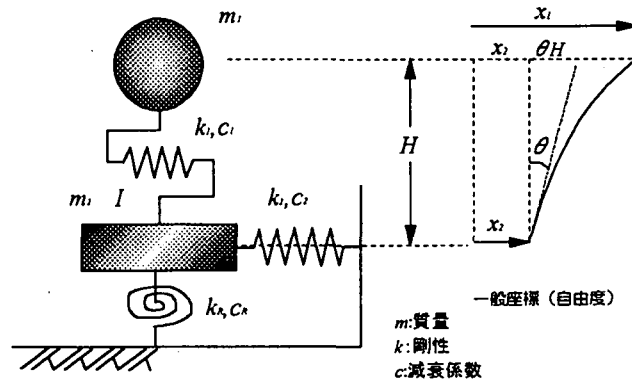


図-2.4.2 多自由度系の例(3自由度系モデル)

運動エネルギー  $K$  は次式で表される。

$$K = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (2.4.3)$$

系のひずみエネルギー  $V$  は次式で表される。

$$V = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - x_2 - \theta H)^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \frac{1}{2} k_R \theta^2 \quad (2.4.4)$$

散逸関数  $F$  は次式で表される。

$$F = \frac{1}{2} c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \dot{\theta} H)^2 + \frac{1}{2} c_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} c_R \dot{\theta}^2 \quad (2.4.5)$$

一般力(慣性力)  $Q_s$  は,  $x_1$  に対しては

$$Q_1 = -m_1 \ddot{x}_1 \quad (2.4.6)$$

一般座標  $x_2$  に対しては

$$Q_2 = -m_2 \ddot{x}_2 \quad (2.4.7)$$

となる。これらを式(2.4.1) または(2.4.2)に代入すれば

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \dot{\theta} H) + k_1 (x_1 - x_2 - \theta H) = -m_1 \ddot{x}_1 \quad (2.4.8)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \dot{\theta} H) + c_2 \dot{x}_2 - k_1 (x_1 - x_2 - \theta H) + k_2 x_2 = -m_2 \ddot{x}_2 \quad (2.4.9)$$

$$I \ddot{\theta} - c_1 H (\dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \dot{\theta} H) + c_R \dot{\theta} - k_1 H (x_1 - x_2 - \theta H) + k_R \theta = 0 \quad (2.4.10)$$

上式をマトリクスの形で表記すれば

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = -[M]\{1\}\ddot{z} \quad (2.4.11)$$

となる。ここに、 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ はそれぞれ質量マトリクス、減衰マトリクス、剛性マトリクス、 $\{1\}$ は地震動の入力方向を示す 1 と 0 からなる行列、 $\ddot{z}$ は地震動加速度である。式(2.4.11)が地震入力を受ける多自由度系の運動方程式である。

## 2.4.2 多自由度系の非減衰自由振動

### (1)固有値解析

建造物の周期により地震応答が大きく異なることが 2.3 節より分かる。特に、建造物の固有周期と入力の周期が一致すると、共振現象によりその応答値が非常に大きくなる。橋梁・高架橋等の耐震設計を考えた場合、建造物の固有振動数やその振動モードを把握することが重要になるといえる。そこで、多自由度系の固有周期や振動モードを求める必要がある。それが固有値解析である。

減衰のない多自由度系の自由振動の運動方程式は式(2.4.11)を参考に

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (2.4.12)$$

と表される。式(2.4.12)の解は  $\{x\} = \{\phi\}e^{i\omega t}$  のようにおくことができる。よって、式(2.4.12)に代入すると、

$$(-\omega^2[M] + [K])\{\phi\} = \{0\} \quad (2.4.13)$$

となる。式(2.4.13)を満足する  $\omega^2$  および  $\{\phi\}$  を求める問題は一般固有値問題と呼ばれる。 $\{\phi\} = \{0\}$  以外の解を持つためには、係数行列式が 0 でなければならないから、

$$|-\omega^2[M] + [K]| = 0 \quad (2.4.14)$$

となる。 $N$  自由度系ならば式(2.4.14)を満足する解(「固有値」とよぶ)  $\omega^2$  は  $N$  個 ( $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2$ ) 求まる。 $\omega$  の小さい方から順に  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$  を 1 次, 2 次,  $\dots$ ,  $N$  次の固有円振動数(rad/sec)と呼ぶ。また、固有円振動数  $\omega$  より、固有振動数  $f_i$ (Hz) および固有周期  $T_i$ (sec) は以下のように求められる。

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad (f_1 < f_2 < \dots < f_N) \quad (2.4.15)$$

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} = \frac{1}{f_i} \quad (T_1 > T_2 > \dots > T_N) \quad (2.4.16)$$

また、各  $\omega_i$  に対して、式(2.4.13)を満足するベクトル

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{Bmatrix}_1, \quad \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{Bmatrix}_2, \quad \dots, \quad \{\phi\}_N = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{Bmatrix}_N \quad (2.4.17)$$

をそれぞれ 1 次, 2 次,  $\dots$ ,  $N$  次の固有モード(あるいは固有ベクトル)と呼ぶ。固有モード  $\{\phi\}_i$  の値は各要素の絶対量を示すものでなく、その相対的な比率(=振動形状)だけを定めるものである。つまり、固有モード  $\{\phi\}_i$  は固有振動数  $\omega_i$  で自由に振動している建造物の振動型を示している。

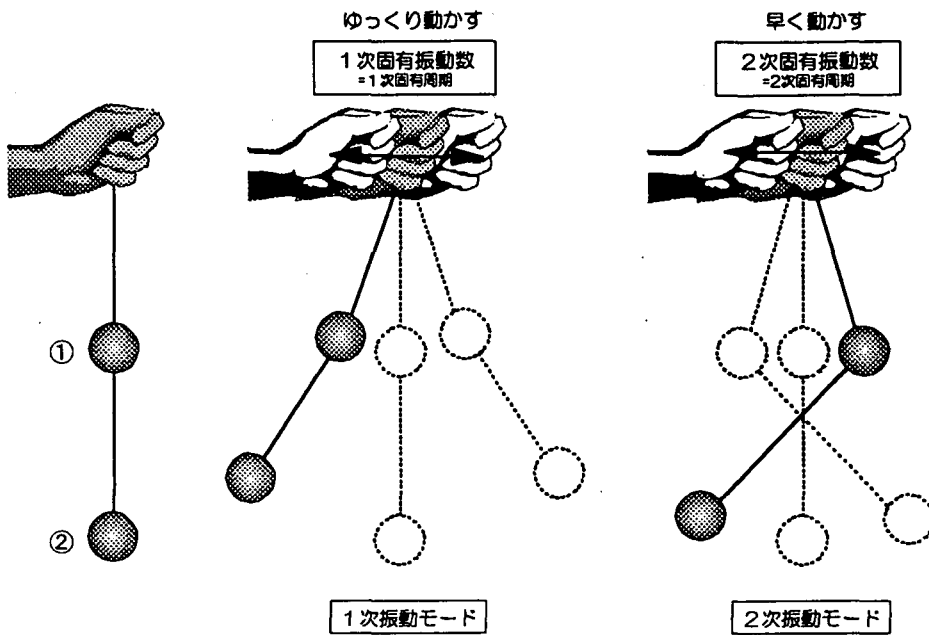


図-2.4.3 固有振動数と固有モードの意味(2自由度系を例にして)

図-2.4.3 に示すように、2個の重りが付いた振り子を例に用いて、固有振動数と固有振動モードの意味を示す。この振り子は2自由度系である。よって、固有振動数と固有モードが2個存在する( $\omega_1$ と $\{\phi\}_1$ 、 $\omega_2$ と $\{\phi\}_2$ )。支点をゆっくり動かすと、①と②の重りは同じ方向に動き、支点を早く動かすと①と②の重りは反対方向の動きをすることは、多くの人が経験しているであろう。この「ゆっくり」「はやく」というのが固有振動数 $\omega_i$ (=固有周期 $T_i$ )であり、「同じ方向に動く形」「反対方向に動く形」という振動の形状が振動モード $\{\phi\}_i$ に他ならない。

## (2)固有振動モードの直交性および正規化

固有ベクトル $\{\phi\}_i$ には、直交性という重要な性質がある。 $i$ 次モードの固有モード $\{\phi\}_i$ と $j$ 次モード( $i \neq j$ )の固有モード $\{\phi\}_j$ を考える。それぞれを質量マトリクス $[M]$ と剛性マトリクス $[K]$ に次式のようにかけると $i=j$ の対角項だけが残し、他は全て0となる。

$$\{\phi\}_j^T [M] \{\phi\}_i = \begin{cases} 0 \\ M_s \quad (s = i = j) \end{cases} \quad (2.4.18)$$

$$\{\phi\}_j^T [K] \{\phi\}_i = \begin{cases} 0 \\ K_s = \omega_s^2 \cdot M_s \quad (s = i = j) \end{cases} \quad (2.4.19)$$

ここで、 $M_s$ を一般化質量、 $K_s$ を一般化剛性とよぶ。先に述べたように、固有モード $\{\phi\}_i$ は、その形状が決まるのみであって、その大きさは任意である。一つの決め方として一般化質量 $M_s$ が1となるように正規化することが多い。

固有ベクトルを列成分とする $N \times N$ の行列 $[\Phi]$ をモーダルマトリクスという。

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2 \quad \dots \quad \{\phi\}_N]$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c|c} \left. \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{array} \right\}_1 & \left. \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{array} \right\}_2 & \dots & \left. \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{array} \right\}_N \end{array} \right] \quad (2.4.20)$$

式(2.4.18), (2.4.19)の関係を式(2.4.20)を用いて表現すると, 次式になる.

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_N \end{bmatrix} \quad (2.4.21)$$

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 M_1 & & & \\ & \omega_2^2 M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N^2 M_N \end{bmatrix} \quad (2.4.22)$$

### 2.4.3 モード解析法

2.4.2 で示した性質を利用すると, 線形の場合は多自由度系の地震応答解析を簡略化することが可能である. 地震動を受けたときの多自由度系の運動方程式は式(2.4.11)で示したように次式で表せる.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = -[M]\{1\}\ddot{z} \quad (2.4.23)$$

記号は式(2.4.11)を参照. (2.4.23)式の解 $\{x(t)\}$ を固有モード $\{\phi\}_i$ の線形和と考える.

$$\{x(t)\} = [\Phi]\{q\} = \{\phi\}_1 q_1(t) + \{\phi\}_2 q_2(t) + \dots + \{\phi\}_N q_N(t) \quad (2.4.24)$$

物理的には, 地震時の構造物の応答 $\{x\}$ は  $N$  個の独立な固有モードの重ね合わせとして考え, その重みとして時間関数  $q_i(t)$  を各モードの振幅として導入したものと考えられる.

式(2.4.24) を式(2.4.23)に代入し, 前から $[\Phi]^T$ をかけると,

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{q}\} + [\Phi]^T [C] [\Phi] \{\dot{q}\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{q\} = -[\Phi]^T [M] \{1\} \ddot{z} \quad (2.4.25)$$

となる. このとき, 減衰マトリクス $[C]$ にある仮定をおくと(2.4.4 項参照), 減衰マトリクスについても直交性が成り立つ.

$$\{\phi\}_j^T [C] \{\phi\}_i = \begin{cases} 0 \\ C_s = 2h_s \cdot \omega_s \cdot M_s \quad (s = i = j) \end{cases} \quad (2.4.26)$$

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = \begin{bmatrix} 2h_1 \omega_1 M_1 & & & \\ & 2h_2 \omega_2 M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2h_N \omega_N M_N \end{bmatrix} \quad (2.4.27)$$



ここに、 $h_s$  は  $s$  次モードの減衰定数であり、 $s$  次の基準振動の減衰の程度を表すものである。以上、直交性の関係を利用すると、最終的には多自由度系の運動方程式(2.4.23)は一般座標  $q_s$  に関する  $N$  個の連立方程式(2.4.28)に分解することができる。

$$M_s \ddot{q}_s + C_s \dot{q}_s + K_s q_s = -\{\phi\}_s^T [M] \{1\} \ddot{z} \quad (2.4.28)$$

さらに、両辺を  $M_s$  で割ると、(2.4.18)(2.4.19)(2.4.26)より

$$\ddot{q}_s + 2h_s \omega_s \dot{q}_s + \omega_s^2 q_s = \frac{-\{\phi\}_s^T [M] \{1\}}{M_s} \ddot{z} \quad (2.4.29)$$

となる。これは 2.3 節で示した 1 自由度系の運動方程式と同じ形をしており、 $N$  自由度系の運動方程式が 1 自由度系の運動方程式に帰着できたことになる。ただし、右辺の入力地震波  $\ddot{z}$  が  $\beta_s$  倍されている。

$$\beta_s = \frac{-\{\phi\}_s^T [M] \{1\}}{M_s} \quad (2.4.30)$$

この倍率に相当する値  $\beta_s$  を刺激係数という。刺激係数の物理的意味は、第  $s$  次のモードが全体の応答にどれだけ寄与しているかを表す指標である。刺激係数の大きさによって、地震時にどのモードが支配的になるか把握することが可能である。

多自由度系の強制振動におけるモード解析法について述べてきたが、その基本は固有モードの直交性にあり、 $N$  元の連立方程式が最終的には独立な 1 自由度系の運動方程式に帰着できるところに特徴がある。特に、一般的な土木構造物では、高次の固有振動は重要とならないことも多く、不要な振動モードを省略して解析することも可能である。

図-2.4.4 に 3 自由度系の構造物を例に取り、その応答解析におけるモード解析法の意味を示す。まず、2.4.2 項に従い 3 自由度系 (構造物) の固有値解析を行うと、その固有振動数  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  および振動モード  $\{\phi\}_1, \{\phi\}_2, \{\phi\}_3$  が得られる。次に、式(2.4.29)に示したように、固有振動数がそれぞれ  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  で、減衰定数が  $h_1, h_2, h_3$  となるような 1 自由度系の構造物を想定し、それぞれの構造物に地震

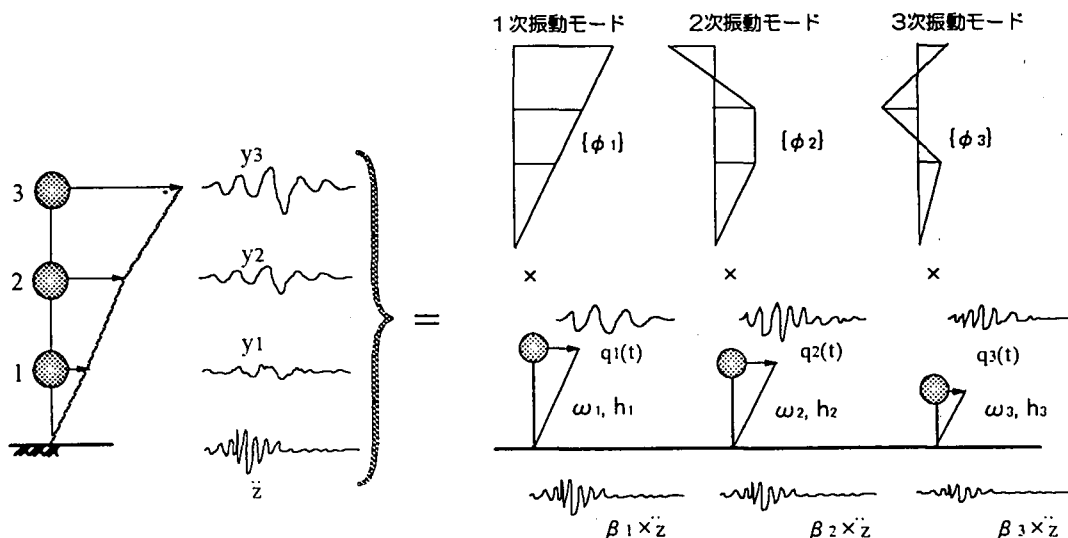


図-2.4.4 モーダルアナリシスによる地震応答の意味

波  $\ddot{z}$  を  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  倍したものが入力されたと考えてその応答値  $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$  を算定する。すると、1 次モードの寄与は、振動モード  $\{\phi\}_1$  が  $q_1(t)$  倍されたと考えることにより得られる。それらを全モード 1~3 まで重ね合わせることで地震時の構造物の応答となるわけである。

#### 2.4.4 減衰マトリクス

2.4.3 で減衰マトリクス  $[C]$  にある仮定をおくと述べた。それは、比例減衰という仮定である。

$$[C] = a_0[M] + a_1[K] \quad (2.4.31)$$

これをレーリー減衰(その他、質量比例減衰  $[C]=a_0[M]$ 、剛性比例減衰  $[C]=a_1[K]$  など)がよく用いられるという。このようにすると  $[C]$  についても式(2.4.26)に示したような直交性が成り立つ。式(2.4.26)で定義された  $s$  次モードの減衰定数は、レーリー減衰の場合、次のようになる。

$$h_s = \frac{1}{2}(a_0/\omega_s + a_1 \cdot \omega_s) \quad (2.4.32)$$

特に、質量比例 ( $[C]=a_0[M], a_1=0$ ) の場合は減衰定数は固有振動数に反比例し、剛性比例 ( $[C]=a_1[K], a_0=0$ ) では固有振動数に比例することは容易に分かる。つまり、剛性比例では高次のモードの減衰定数が大きくなり、全体の応答に占める高次モードの影響が相対的に小さくなることになる。設計実務における動的解析においては、特に非線形解析では計算の収束性の観点から、剛性比例型の減衰を設定する場合が有利なことがある。

さて、構造物の振動解析では、減衰の細かいメカニズムはよく分からないことが多く、各次のモード減衰を実験・解析等により定め、これに応じた減衰マトリクス  $[C]$  を作成する方法がしばしば用いられる。例えば、1 次と 2 次の減衰定数  $h_1, h_2$  を与えた場合、以下の連立方程式を解いて  $a_0, a_1$  が定まる。

$$a_0 = \frac{2\omega_1\omega_2(h_1\omega_2 - h_2\omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (2.4.33)$$

$$a_1 = \frac{2(h_2\omega_2 - h_1\omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (2.4.34)$$

その他、構造物の各部分が任意の異なる減衰性能を有する場合、減衰マトリクスは比例減衰の条件を満たさず(非比例減衰)、このような問題は複素固有値問題に帰着される。

### 2.5 構造物の弾塑性応答

構造物は、変形が小さい間はほぼ弾性とみなせるが、変形が大きくなると亀裂、降伏、すべり等を生じ、復元力と変形の関係はループ(履歴ループ)を描くようになる。L2 レベル地震動のように大加速度を対象とした場合には、構造物の応答が塑性領域に及ぶことは避けられない。本章では、1 自由度系を例にとり、弾塑性応答に関する基本的な特性について述べる。

#### 2.5.1 弾塑性復元力特性

地震動に対する 1 自由度弾塑性系の運動方程式は次式で表される。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Q(x) = -m\ddot{z} \quad (2.5.1)$$

$m$  は質量,  $c$  は減衰係数,  $x$  は相対変位,  $\ddot{z}$  は地震動加速度である.  $Q(x)$  は復元力特性と呼ばれるもので変形履歴だけの関数である. 構造物の変形が小さい範囲ではほぼ弾性とみなせるが, 変形が大きくなると部分的にクラックや塑性化などによる損傷が累積し, 復元力と変形の関係は履歴ループを描く. このような弾塑性復元力特性あるいは履歴特性(これらをまとめて, 本テキストでは非線形履歴モデルと呼ぶ)を適切に設定することが構造物の応答性状を弾塑性応答解析によって把握する場合に重要である.

弾塑性応答解析に用いる非線形履歴モデル(復元力特性)は, 対象となる材料・構造に応じて種々提案されている. 例えば, 最も基本的な形状の例として図-2.5.1 のような3つのタイプが挙げられる. (a)のバイリニア型は変形性能つまり粘りに富んだ構造物の特性として広く用いられる. 鋼構造物をモデル化するときによく使われるモデルである. 履歴ループによるエネルギー消費が大きい特徴を有している. (b)の剛性低下型は, 一度塑性変形を経験すると同一ループを描かず, 次第に剛性が低下していく. 鉄筋コンクリート構造物をモデル化する場合によく使われる. (c)のスリップ型は, 復元力の小さい範囲での戻り剛性が小さく, 履歴ループによる消費エネルギーは小さい. このように非線形履歴モデルを決定するには, その骨格曲線(スケルトンカーブ)と履歴法則が必要である. なお, 非線形履歴モデルによる相違によって応答値がどの程度変化するかを2.5.3項に示した.

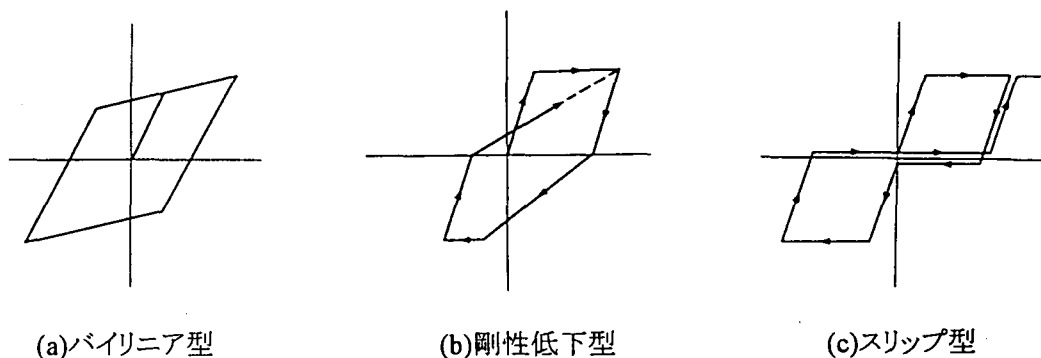


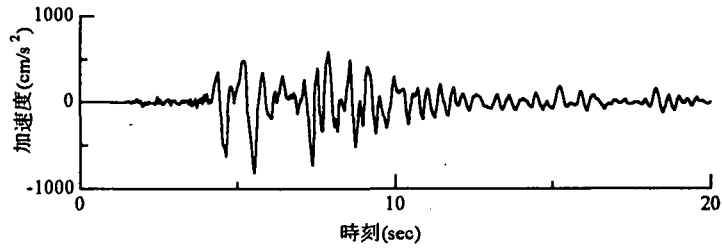
図-2.5.1 復元力モデルの例

## 2.5.2 地震に対する弾塑性応答

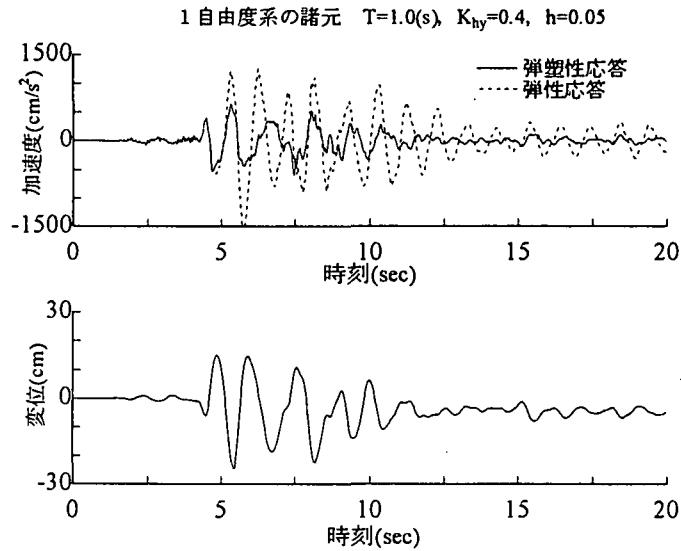
地震動に対する弾塑性系の運動方程式は式(2.5.1)で表される. 式(2.5.1)を解くには数値積分によって行われる. 数値積分法については, 「5.1.4 直接積分法」を参照のこと.

図-2.5.2 は兵庫県南部地震で神戸海洋気象台で観測された波形に対する1自由度系の弾塑性応答の例である. 構造物の固有周期  $T=1.0$ (s), 降伏震度  $k_{hy}=0.4$ , 減衰定数  $h=0.05$  とした場合である. 履歴モデルはクラフ(Clough)型<sup>※1)</sup>を用いた. 比較のために弾性解析の結果も点線で示している. 加速度波形をみると, 弾塑性応答の場合には, 応答加速度は降伏震度相当で頭打ちとなり 500(gal)程度しか発生していないことが分かる. しかも塑性化により周期が弾性応答の場合よりも伸びている. また, 変位応答をみると, 残留変形が生じて波形が一方へずれている. 図(b)は変位と復元力との関係を示したものである. 履歴ループが面積を囲むことにより, 塑性エネルギー吸収が生じているのが分かる.

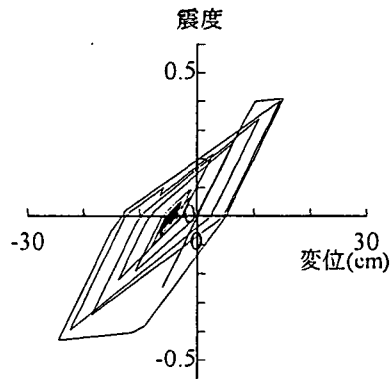
※1) Clough モデルとは, 復元力を2本の折れ線で簡略化し, 除荷時には初期剛性で戻り, 加力の場合は加力方向の最大経験点を指向(最大点指向型)する非線形履歴モデルである.



入力加速度波形(神戸海洋気象台 NS 成分)



(a) 時刻歴応答波形(加速度と変位)



(b) 履歴曲線(変位と作用震度との関係)

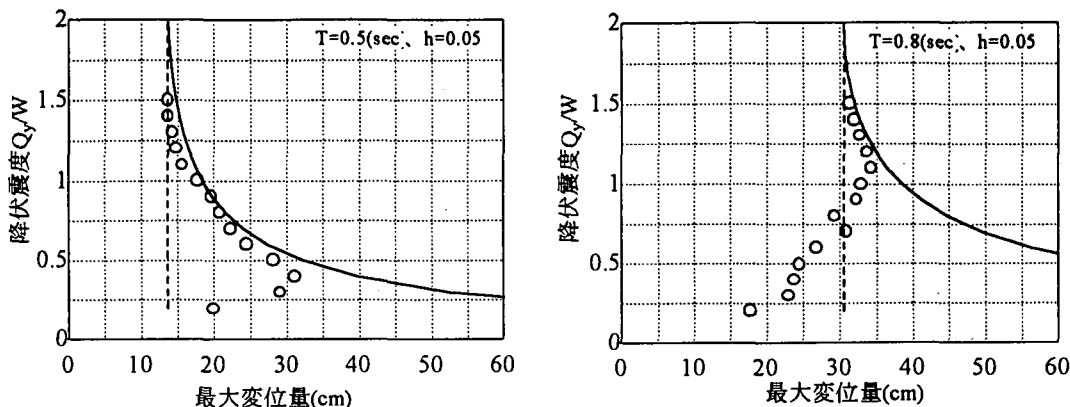
図-2.5.2 1自由度系の弾塑性応答解析結果の例

以下, 弾塑性応答の基本的な性質について述べる.

(a) 最大応答変位

構造物の初期周期  $T$  を一定 (0.5 秒と 0.8 秒) として, 降伏耐力を変化させたとき, 最大応答変位がどのように変化するかを示したのが図-2.5.3 である (履歴モデルはバイリニアモデルで, 第 2 勾配は 0%). 縦軸に降伏震度 ( $=Q_y/W$ ,  $Q_y$ : 降伏荷重,  $W$ : 重量), 横軸に最大変位をとって示してある. 入力地震

動は神戸海洋気象台 NS 成分(最大加速度 818gal)である。T=0.5 秒の構造物では、降伏震度の低下とともに最大変形は増加する傾向にある。T=0.8 秒の構造物では降伏力がある限度以上であれば、最大変形は弾性変形とあまり変わらない値となっている。



(a) 固有周期  $T=0.5(s)$

(b) 固有周期  $T=1.0(s)$

図-2.5.3 降伏耐力を変化させたときの弾塑性系の最大応答変位量

(実線:エネルギー一定則、点線:変位一定則)

(b)エネルギー一定則(図-2.5.4(a)参照)

比較的短周期の範囲では、初期周期の等しい弾性系の最大ひずみエネルギー(図中 $\triangle OAD$ )と弾塑性ひずみエネルギー(図中台形  $OBCE$ )とは降伏力によらずほぼ等しい。つまり( $\triangle OAD$  の面積)= (台形  $OBCE$ )となる。

(c)変位一定則

比較的長周期の範囲では、降伏力がある限度以上なら、図-2.5.4(b)に示すように、弾塑性系の最大変形は初期周期の等しい弾性系の最大変形とほぼ等しい。

これら、エネルギー一定則および変位一定則は、多くの応答解析の結果から得られた経験則である。これらの関係を用いれば弾性応答量から弾塑性応答量を推定することが可能となり、実用上は便利である。エネルギー一定則および変位一定則における諸量の関係をまとめて表-2.5.1 に示す。ただし、これらはいずれも経験則であり、地震動特性や構造物の特性によって大きく異なる場合があることに注意する必要がある。

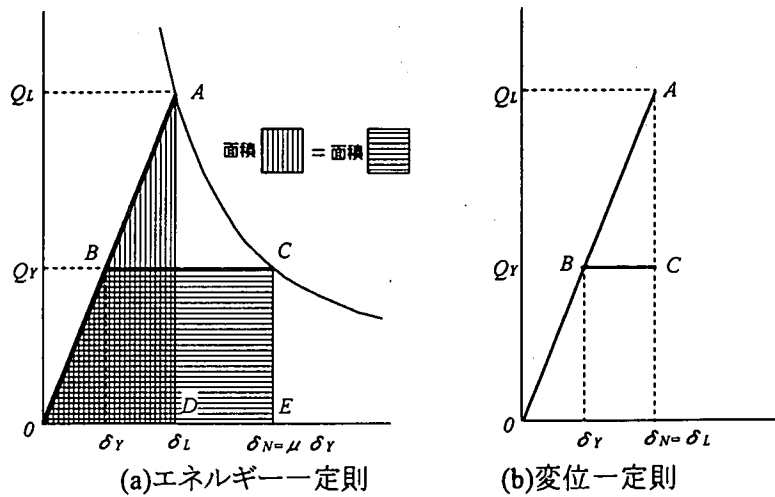


図-2.5.4 エネルギー一定則と変位一定則の考え方

表-2.5.1 エネルギー一定則と変位一定則

	エネルギー一定則	変位一定則
最大変形量 $\delta_Y =$	$\frac{\mu}{\sqrt{2\mu-1}} \delta_L$	$\delta_L$
塑性率 $\mu =$	$\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{Q_L}{Q_Y} \right)^2 \right\}$	$\frac{Q_L}{Q_Y}$
降伏力 $Q_Y =$	$\frac{1}{\sqrt{2\mu-1}} Q_L$	$\frac{1}{\mu} Q_L$

記号は図-2.5.4 を参照

### 2.5.3 弾塑性応答スペクトル

L2レベルの構造物の耐震設計においては、地震時に構造物が塑性化することを許容することになる。こうした設計において便利なように構造物の弾塑性応答を応答スペクトルとして表したものを弾塑性応答スペクトルという。弾塑性応答スペクトルの形態には様々なものが考えられる。その中でも耐震設計で最も有用であると考えられるのが必要降伏震度スペクトルであろう。

必要降伏震度スペクトルとは、構造物の周期  $T$  をパラメータにして1自由度系の弾塑性応答解析を行い、構造物の応答塑性率がある一定値  $\mu$  になるときの耐力(強度)  $Q_y$  を算定し、横軸に固有周期  $T$ 、縦軸にそのときの必要降伏耐力  $Q_y$  を構造物重量で除した震度  $Q_y/W$  をとったものである。その作り方の概念図を図-2.5.5 に示す。

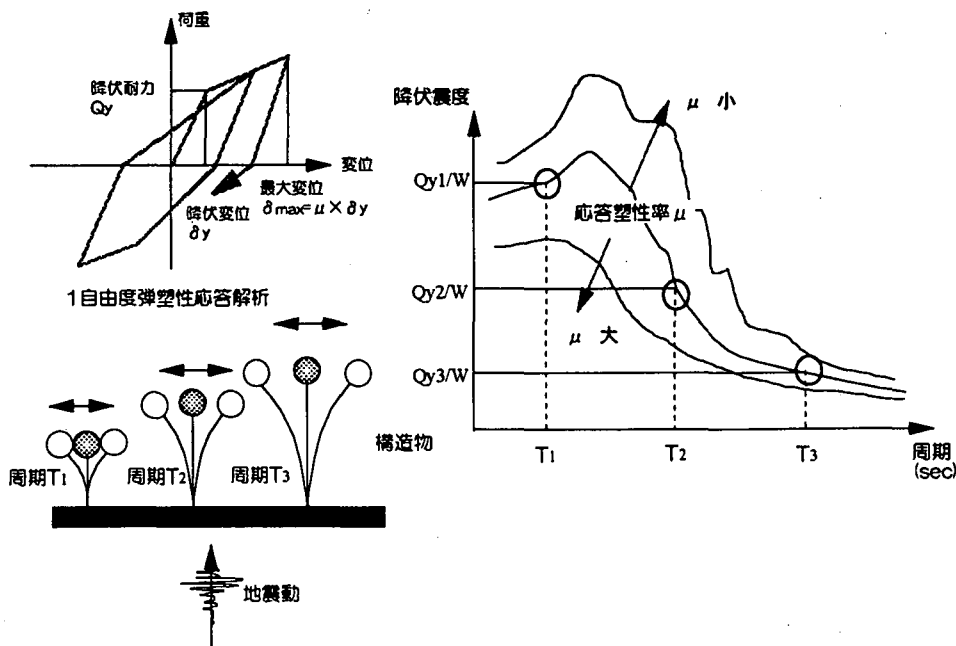


図-2.5.5 必要降伏震度スペクトルの作成方法

耐震設計上は、必要降伏震度スペクトルには2つの使い方ができる。1)固有周期  $T$  と許容する塑性率(構造物に付与する変形性能)が決まれば構造物にどれだけの耐力を付与したらよいか容易に算定できることになる。2)一方、固有周期  $T$  と降伏耐力が算定された場合に、地震時にその構造物がどれだけの応答塑性率を示すかを算定することが可能となる。

神戸海洋気象台の記録に対して必要降伏震度スペクトルを算定した例を図-2.5.6に示す。図中には、非線形履歴モデルの相違による影響を見るために、通常の Bi-linear モデル, Clough モデル, 原点指向モデルを用いた場合の3つの結果を示している。なお、2次勾配は1次勾配の 10%とした。最も履歴吸収エネルギー量が多いバイリニアモデルが最も必要降伏震度(耐力)が小さく、履歴吸収エネルギー量が少ない原点指向型モデルが最も必要降伏震度(耐力)が大きくなる。このように、履歴モデルの選び方で、弾塑性応答量が大きく異なることが分かる。

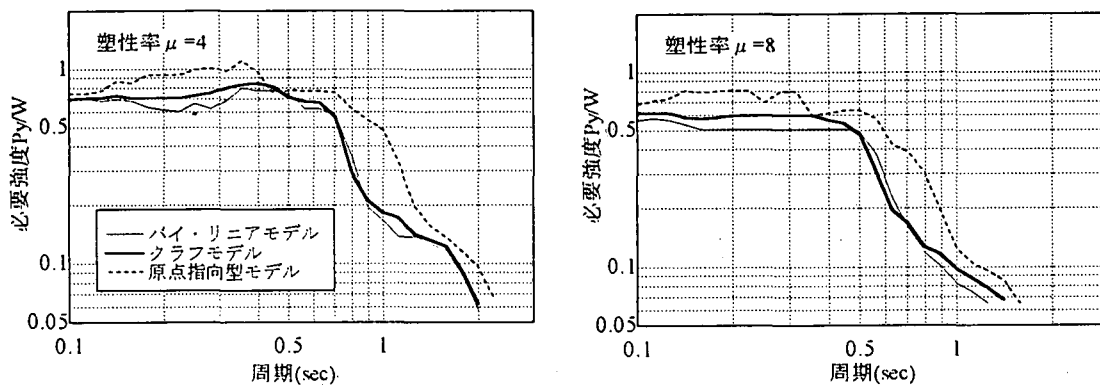


図-2.5.6 必要降伏震度スペクトルの例

またエネルギー一定則や変位一定則との比較をしたのが図-2.5.7である。なお、弾塑性解析では非線形履歴モデルとしてはバイリニア型を用いている。短周期側でエネルギー一定則が、長周期側で変位一定則が弾塑性応答解析の結果に近いことが分かる。しかし、塑性率が大きい場合や、構造物の周期帯域によっては、弾塑性応答解析の結果と経験則とがかけ離れる場合もあることに注意する必要がある。

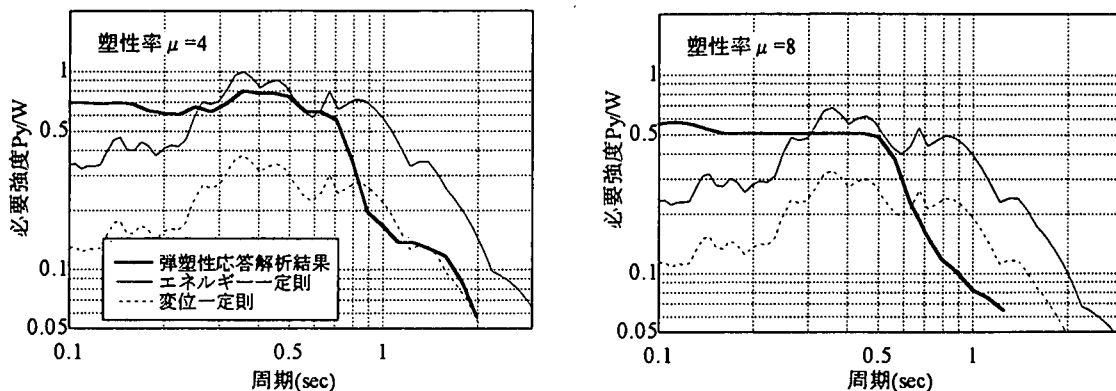


図-2.5.7 弾塑性応答解析の結果とエネルギー一定則、変位一定則との比較

## 2.6 おわりに

本章では、地震時のものの揺れ方について、基本的な事項について解説した。多少数式が多くなってしまった部分もあるが、ものの揺れ方を理解する上で最低限必要なものと思われる。

設計実務で動的解析を行なう機会がますます増える傾向にあり、多くの解析ソフトも市販されている。ユーザーは振動論に関する深い知識がなくても一通りの計算ができるようになってきているようである。しかし、単なるキーパンチャーとならないためにも、振動論の基本的な知識を身につけることが重要である。また、計算上得られた結果を解釈する上でも、ものの揺れ方に関する基礎知識(センス)が必要不可欠であろう。このような観点から、本稿では振動論の基礎知識を理解していただくことを目的にまとめたつもりである。今後の耐震設計実務を行なう上で、少しでも参考になれば幸いである。

なお、紙面の都合上、例題が不足してしまった。また、フーリエ解析やランダム振動に関する解説まで及ばなかった。そこで、本書の内容を補足する入門書として、参考文献を幾つか列挙したので、参照していただきたい。

### 参考文献

- 1)国井隆弘：よくわかる構造振動学入門，工学出版，1995.
- 2)川井忠彦，藤谷義信：振動および応答解析入門(有限要素法の基礎と応用シリーズ5)，培風館，1991.
- 3)平井和男，水田洋司：耐震工学入門，森北出版，1994.
- 4)山口宏樹：構造振動・制御(テキストシリーズ土木工学8)，共立出版，1996.
- 5)柴田明徳：最新・耐震構造解析，森北出版，1981.
- 6)土木学会：動的解析と耐震設計 第2巻 動的解析の方法，技報堂出版，1989.
- 7)大崎順彦：新・地震動のスペクトル解析入門，鹿島出版会，1994.