

## 2. ものの揺れ方

### 2.1 はじめに

構造物の耐震設計という観点からは、たとえば地震が発生した時に構造物はどうのような大きさで揺れるのか、どの程度の荷重が作用するのか、等の定量的な評価を基に種々の工学的な検討や決定を行っていくことから、ものが揺れるという現象を理解することが重要であることは容易に理解されるであろう。地震時の構造物の実挙動を精密に予測するためには事前に多種多様な情報が必要であり、必ずしも明確に定めることができないことが通常であるものの、設計に用いられる値がどのような概念や前提条件のもとで定められているのか、その議論を基本として理解しておくことが必要であろう。このような「ものが揺れる」という現象についての基本的な理論は、「振動論」として整理されている。本章では、振動論の中でもとりわけ耐震設計法の理解に有用と思われる基本的な事項を説明する。1自由度の自由振動から始まって強制振動、多自由度の振動、弾塑性応答までをいたる一連の流れを追いながら、振動という現象の本質を理解することを目的としたい。

### 2.2 ものの揺れをどう解析するか

#### 2.2.1 振動モデル

一般に力学的な現象や工学的な設計のプロセスにおいては、対象物の実物の挙動を再現し、現象の理解・把握ならびに計算ができる力学モデルが必要である。力学モデルの設定においては、様々なレベルの複雑さを持つモデルが提示可能である。例えば橋梁構造物の弾性挙動だけに話を限っても、有限変形弾性論による3次元モデル、微小変形弾性論による3次元モデル、材料力学による1次元モデル、有限要素法による数値モデルなどが考えられる。全般的には、精密なモデルであるほど実物の挙動に近い結果が得られるが、複雑で解くのに手間がかかるという傾向があるであろう。

力学モデルとは、実物の特定な入出力関係、例えば与えられた荷重に対する橋桁の変位のような量を、工学的許容範囲で再現できるシステムを言う。すなわち、力学モデルは、着目している実物のある特定の入出力関係を説明することが目的であり、異なる状況下で実物が示すであろう他の入出力関係まで説明できるかどうかは問われない。モデルの設定は、どのような入出力関係に関心があるかにより決まるものである。

モデルのパラメータがどれほど精密に設定されていても、モデルはあくまでも概念上のものであり実物ではない。したがって、モデルの出力に誤差が含まれることは避けられない。問題は、その誤差が工学的許容範囲内にあるかどうかには帰着する。たとえば、ここに同じ入出力量に対する2つの力学モデルがあるとすると、一方のモデルの出力は、他のモデルに比べ極めて高精度であるが解くのに大変手間がかかり、他方のモデルの誤差は工学的許容範囲内に収まる程度である代わりに計算は簡便であるとする。この場合、解析や設計に有用な後者のモデルを用いる方が有利である。モデルの選択にあたっては、こうした工学的な要請を考慮する必要がある。

ものの揺れ方の解析においては、地震時のような動的な作用に対して構造物が示すであろう動的な挙動を表現する力学モデル、または振動モデルと呼ばれるものが必要となる。この

振動モデルの設定に関しては、これまで述べた力学モデルの選択の考え方が適用される。

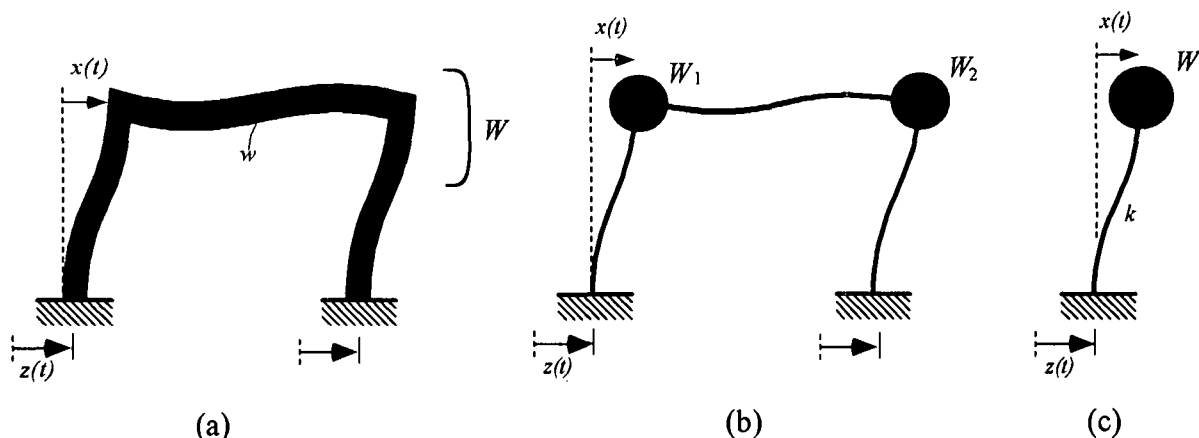


図-2.2.1 振動モデルの考え方

図-2.2.1 に示すような剛な基盤上に建てられたラーメン構造を考えよう。この構造物が地震動を受けている時のある瞬間での弾性変形を示すものとする。図-2.2.1(a)の状態を記述する事は、部材変形での断面平面保持の仮定や軸方向変形無視の仮定を容認したとしても、かなり煩雑になる。例えば、はりの運動を考えてみても、はり全体として左右に振動すると同時に、曲げによる部分的な上下運動もする。したがって、はり自重および荷重による慣性力は、水平に作用するとともに、部分的には垂直にも作用し、曲げによる回転慣性まで生じる。これらの慣性力に釣り合う抵抗力もまた、それなりの記述をしなければならない。柱についても同様である。図-2.2.1 のような簡単な構造物であれば、こうした解析は必ずしも不可能なことではないが、このようなモデル化には次のような2つの問題点が生じる。

- (1) 計算が不必要に複雑となり実用上の計算が難しくなる。一般に存在する複雑な構造物に対しては、この問題点はより切実なものとなる。
  - (2) 問題としている振動現象の本質的な理解には適しておらず問題の見通しが悪くなる
- そこで、より適切なモデルを作るために、何に関心があるのかを整理してみよう。

上記のモデルの場合、この構造物がある地震動を受けるとき、その応答変位の最大値が目下の問題である。これを求める目的のため、さらに簡単な弾性棒で質点を支えた図-2.2.1(c)のモデルが考えられる。このモデルは応答変位のみを現出できるように工夫されたもので原型と全く異なる。この場合、水平方向の復元力（ばねによる反発力）は図-2.2.1(b)のモデルと全く同じに設定する。従って、全質量を支えている弾性棒に生じるせん断力は、図-2.2.1(b)のモデルの2本の柱に生じているせん断力の和となる。このような図-2.2.1(c)のモデルは通常集中質点系モデルと呼ばれている。

これまでの記述での振動モデルは、まだ現実の構造物との対応に乏しい。なぜならば、減衰が考慮されていないため、この式の表している運動は地動が終息しても止まらない。また、線形ばねを仮定していることから、どのように大きな入力があっても、復元力は常に弾性である。これらは地震時に実際の構造物が示す挙動とは異なっていることは明らかである。また、これまでの議論に基づいてモデルに対し、次に必要に応じて考慮に入れるべき入出力改善を加え振動モデルを使用することになる。たとえば部材の振動のモデル化として、図-2.2.2

に示すようなせん断振動と曲げ振動，ねじれ振動などがあるが，どれが適切なモデルであるのかは場合によって異なってくることに注意する必要がある。

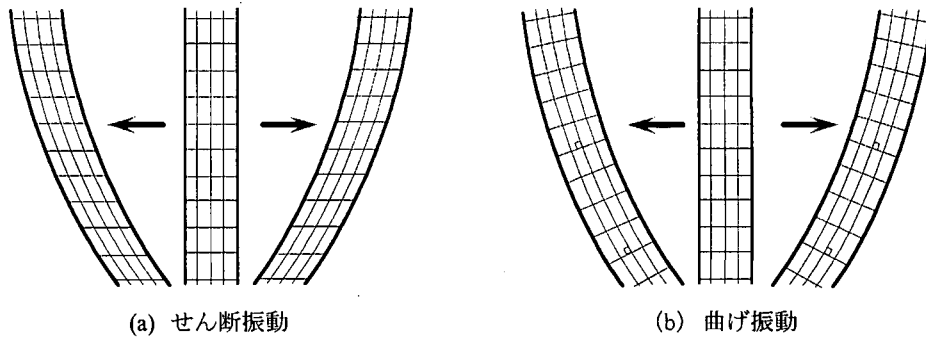


図-2.2.2 せん断振動と曲げ振動

このような簡略化したモデルの考え方の適用範囲は広い。たとえば，地盤振動のような現象は，本来複雑かつ広範囲にわたる地盤を対象に考察しなければならないものであるが，たとえば地盤が水平せん断振動する単純なモデルに基づいて，固有周期のような特性値の意味や地震動の増幅などの現象の基本的な性質を，1質点系モデルを用いて説明または理解することが可能である。

### 2.2.2 揺れを起こすもの

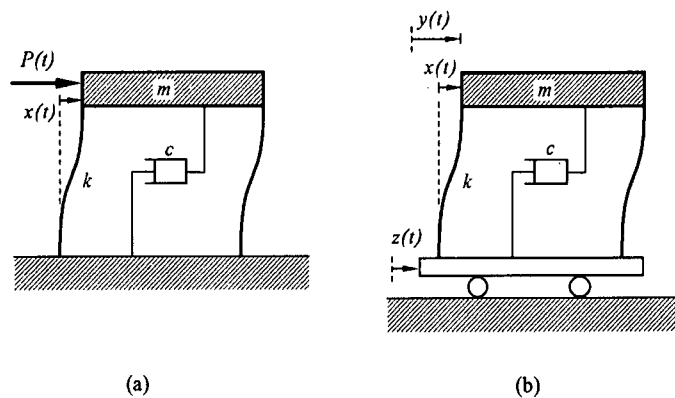


図-2.2.3 入力による問題の分類

構造物が振動する原因は，2つに大別することができる。1つは構造物に外的な作用として荷重（外力）が働いている場合である。代表的な例としては，風，波浪，橋における自動車や列車の走行による振動が挙げられる。他の1つは地震のように構造物が設置されている基盤面の変位により振動が発生する場合である。この時，構造物には外力は直接作用してはいないが，基盤から見た構造物の加速度により生じる慣性を「地震力」と見なし，これが外力として作用していると解釈することができる。図-2.2.3 にこの両者の場合の概念図を示す。(a)は動的な外力が作用する場合であり，(b)は地震による基盤加振のケースである。

言うまでもなく、こうした外力が無くても構造物の揺れが発生している状態も存在する。例えば地震による振動の場合、地面の揺れが止まっても構造物の揺れがしばらく続くことがある。このような状態を自由振動と呼ぶ。これに対し、外力や地面の揺れとともに構造物が揺れている状態が強制振動に対応する。

構造物の安全性の観点からは強制振動がより重要であるが、構造物の振動のメカニズムを理解するための基礎となること、振動でよく用いられる固有な用語が自由振動状態で定義される等の理由により、まず自由振動に注目してその性質を述べておく。

## 2.3 1自由度系の線形応答

### 2.3.1 1質点系の振動

ここでは、図-2.3.1 の場合について考える。質点の元の位置（平衡状態）からの変位を  $x$  とし、この変位を時間1階微分した速度を  $\dot{x}$ 、2階微分した加速度を  $\ddot{x}$  で表す。今、1質点系の質量に作用する力はバネによる復元力  $kx$ 、およびダッシュポットによる粘性減衰力  $c\dot{x}$  である。これらが質点の慣性力とともに釣り合っているという条件を式で書けば、次のようになる。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.3.1)$$

この時間に関する2階微分方程式は運動方程式と呼ばれる。構造物の揺れ、すなわち振動挙動を解明するためには、このような微分方程式の解を得なければならない。

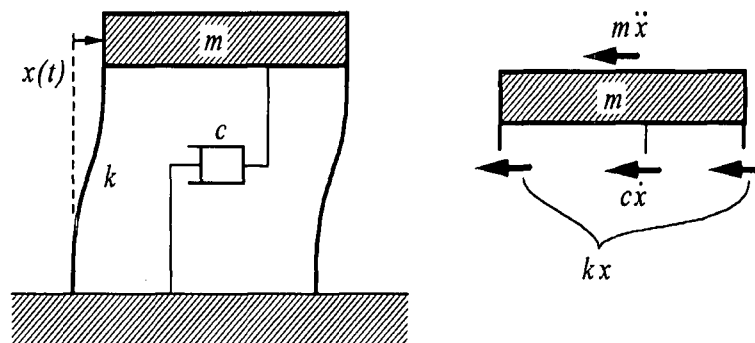


図-2.3.1 1質点系の自由振動

いま、後の便宜のため、この運動方程式(2.3.1)の両辺に  $1/m$  を乗じると、次のような形に書き換えることができる。

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (2.3.2)$$

ここに

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad h = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (2.3.3)$$

すなわち、式(2.3.2)は質量  $m$ 、復元力バネ係数（剛性） $k$ 、および粘性減衰係数  $c$  の3つのパラメータの代わりに、式(2.3.3)で与えられた2つのパラメータ  $\omega_0$  および  $h$  を用いて運動方程式を表したものである。

### 2.3.2 自由振動と減衰

さて、運動方程式(2.3.2)は、次のような解を持つことが知られている。

i)  $h > 1$  の場合

$$x(t) = e^{-h\omega_0 t} \left\{ A e^{\sqrt{h^2-1}\omega_0 t} + B e^{-\sqrt{h^2-1}\omega_0 t} \right\} \quad (2.3.4)$$

ii)  $h = 1$  の場合

$$x(t) = e^{-\omega_0 t} \{ A + Bt \} \quad (2.3.5)$$

iii)  $h < 1$  の場合

$$x(t) = e^{-h\omega_0 t} \left\{ A \sin(\sqrt{1-h^2}\omega_0 t) + B \cos(\sqrt{1-h^2}\omega_0 t) \right\} \quad (2.3.6)$$

いずれの解についても、 $A, B$  はそれぞれ任意の定数である。解の誘導の詳細については、本章の付録を参照されたい。これらの解の代表的な例を時刻暦のグラフとして図示したものを、図-2.3.2 に示す。

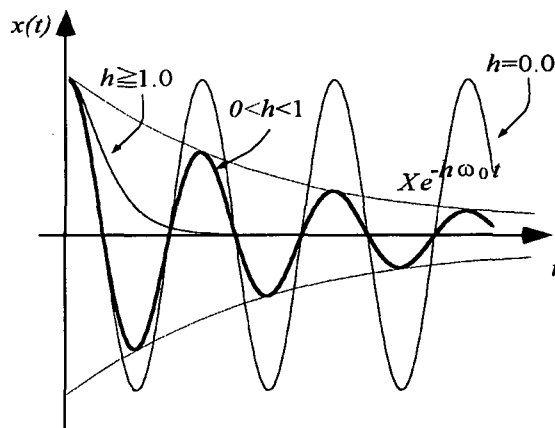


図-2.3.2 1質点系の自由振動解

図-2.3.2 で示されるように、減衰定数  $h$  の値の範囲により解の性質が大きく変化する。構造物の振動問題では、特に  $0 \leq h < 1$  となるケースが重要である。これに対応する式(2.3.6) をさらに変形すれば、次のように表現することができる。

$$x = X e^{-h\omega_0 t} \sin(\omega_d t + \phi) \quad (2.3.7)$$

ここに、 $X, \phi$  は任意の定数であり、

$$\omega_d = \sqrt{1-h^2} \omega_0 \quad (2.3.8)$$

である。上式(2.3.8)からもわかるように、これは振幅が時間とともに指数関数的に減少して

いく正弦波関数であり、いわゆる減衰振動を表現していることがわかる。特に  $h$  が 1 に比べ十分小さな値である時には、この正弦波の円振動数  $\omega_d$  は  $\omega_0$  よりも小さな値となるが、大きな違いは現れない。また、 $h$  はその振幅の減少の速さを表していることがわかる。このことより、式(2.3.3)において導入されたこれらのパラメータは、それぞれ

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad : \quad \text{固有円振動数}$$

$$h = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad : \quad \text{減衰定数 (または減衰比)}$$

と呼ばれる。

固有円振動数  $\omega_0$  に関連して、次のように定義される特性値もしばしば用いられる。

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad : \quad \text{固有振動数}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad : \quad \text{固有周期}$$

なお、減衰定数  $h$  がゼロの場合は減衰が存在しない非減衰振動の場合に相当し、解は一定振幅の正弦波となる。 $h=1$  の場合は振動状の解が現れるかどうかの境界であり、これより減衰定数が多い場合には指数関数的に静止状態に漸近する、非振動的な解となることから、この状態を臨界減衰と呼んでいる。減衰振動は、これらの間の中間的なケースに対応する。

実際の構造物の減衰定数の値を決定することは、一般的には難しい問題である。過去に行われた試験・実験あるいは地震観測などから、土木構造物については経験的におよそその値が推定されている。例えば橋梁の上部構造では 0.01 から 0.05 程度であり、基礎では 0.1 から 0.4 程度の範囲である。

この自由振動の性質を利用して計測により減衰定数を定める方法として、次のようなものがある。前述の通り、減衰振動の振幅は時間とともに指数関数的に減少していくため、図-2.3.3 に示すように、振動の周期を  $T$  とすると、各サイクル毎の振幅は  $e^{-h\omega_0 T} : 1$  の割合で等比級数的に減少していく。この比率を用いて、次のように算出される値  $\delta$  のことを対数減衰率 (**logarithmic decrement**) と呼ぶ。

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \frac{e^{-h\omega_0 t_1}}{e^{-h\omega_0(t_1+T)}} = \ln e^{h\omega_0 T} = h\omega_0 T \quad (2.3.9)$$

ここに

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad : \quad \text{減衰振動固有周期} \quad (2.3.10)$$

である。 $h$  と  $\delta$  の値の間には、次のような関係がある。

$$\delta = \frac{2\pi h}{\sqrt{1-h^2}} \quad (2.3.11)$$

ここで、減衰定数  $h$  が 1 に比べて十分小さい範囲の値であるとすると、この関係は次のよう

に近似することができる。

$$\delta \cong 2\pi h \quad (2.3.12)$$

式(2.3.11) およびその近似である(2.3.12)を比較して示したものを図-2.3.4 に示す。対数減衰率は実験で得られた自由振動波形より比較的容易に読み取ることが可能であるので、式(2.3.12)より

$$h = \frac{\delta}{2\pi} \quad (2.3.13)$$

の関係を利用して構造物の減衰定数  $h$  を測定することができる。また、 $n$  番目の変位のピークの大きさを  $x_n$  とすれば、対数減衰率は次のように定めることもできる。

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_0}{x_n} \quad (2.3.14)$$

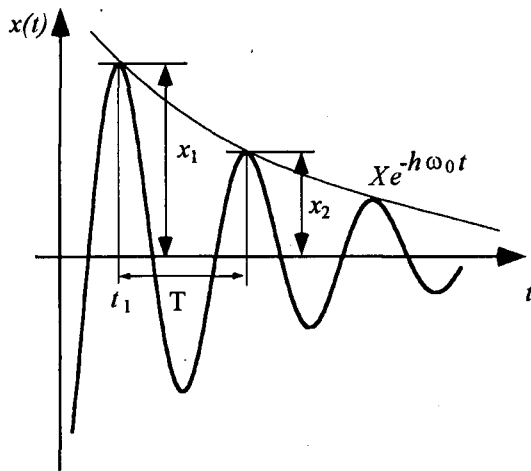


図-2.3.3 減衰振動とサイクル毎振幅

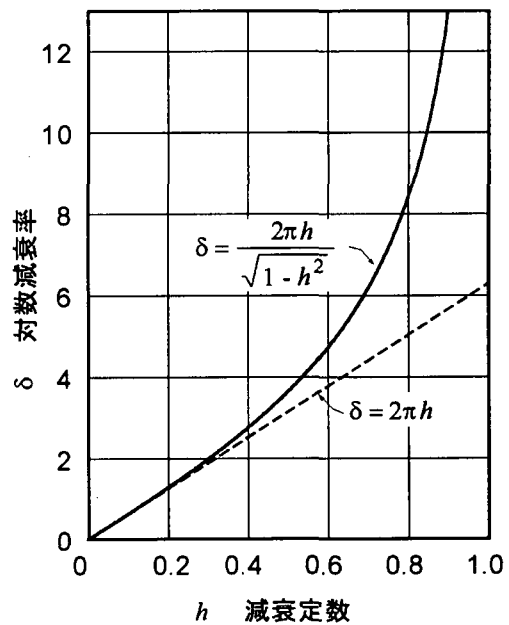


図-2.3.4 対数減衰率と減衰定数の関係

### 2.3.3 調和入力に対する応答

#### (1) 強制外力の場合

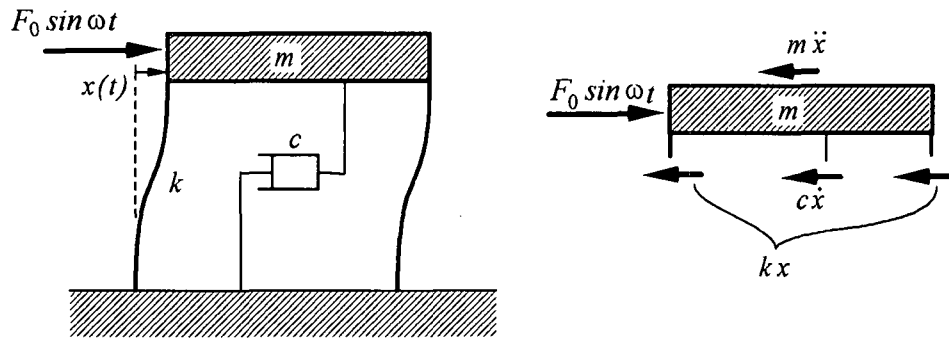


図-2.3.5 外力による1質点系の強制振動

図-2.3.5 に示すように、1自由度系が正弦波状に変動する外力により加振される場合を考える。1質点系に対する円振動数 $\omega$ の正弦波入力の場合の応答を記述する運動方程式を前節と同様に導けば、次のようになる。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (2.3.15)$$

ここで、応答の解  $x$  は、一般解（自由振動）と特解（強制振動）の2つの項の和からなることが知られている。自由振動を表現する一般解はすでに前節で説明されたものである。ここでは、このような正弦波状の外力により継続的に生じる応答について着目する。いま、入力振動数がゼロの場合に対応する静的な変位応答を  $X_{static}$  とすれば、

$$X_{static} = \frac{F_0}{k}$$

となる。各々の $\omega$ の場合についての応答振幅  $X_0$  を、この  $X_{static}$  を基準とした比として求めると、次式のようになることが導かれる（本章付録を参照）。

$$A_1 = \frac{X_0}{X_{static}} = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \left\{2h\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right\}^2}} \quad (2.3.16)$$

この  $A_1$  を動的応答倍率と呼び、周波数軸に対してプロットして示したもの（図-2.3.6）は共振曲線と呼ばれる。また、位相  $\phi$  を同様に求めると

$$\tan \phi = \frac{2h\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (2.3.17)$$



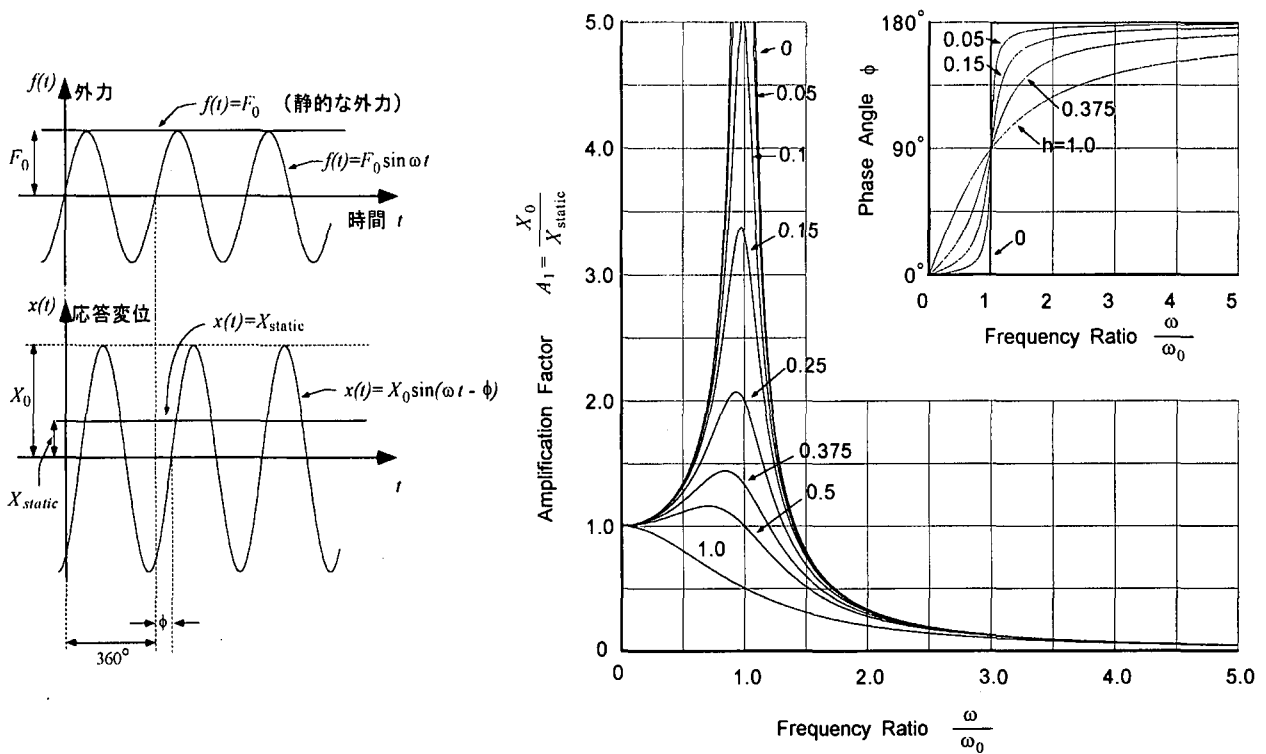


図-2.3.6 動的強制外力による定常応答と応答倍率曲線

となる。φを同様に図-2.3.6に示したものは位相曲線と呼ぶ。これらの結果(2.3.16)および(2.3.17)の導出は、本章の付録に示した。この図に示されているように、 $0 \leq \omega \leq \omega_0$ の範囲内ではωが増大するにつれて $A_1$ は増大し、 $\omega/\omega_0=1$ すなわち起振力の振動数が1質点系の固有振動数に近づいたとき、強制振動の振幅は著しく増大する。この状態を共振という。

また、 $\omega > \omega_0$ の範囲では、ωが大きくなるにつれて動的応答倍率は小さくなり、 $\omega_0$ よりはるかに大きくなると0に近づくという傾向を示す。また、位相曲線に着目すると、共振点 $\omega = \omega_0$ を境として位相が0からπまで変化して反転する性質がある。

また、共振時の応答振幅は、共振曲線のピークすなわち $\omega/\omega_0=1$ の時、式(2.3.16)より

$$\frac{X_0}{X_{static}} = \frac{1}{2h} \quad (2.3.18)$$

で与えられ、減衰定数に反比例することもわかる。したがって、減衰定数は共振応答が発生した場合における応答の大きさに直接関連した特性値であり、特に減衰の小さな構造物に共振が発生すると極めて危険であることを意味している。

## (2) 基盤入力の場合

さらに、1自由度系の支点が地震によって変位するような基盤入力の場合について考える。図-2.3.7で示されるように

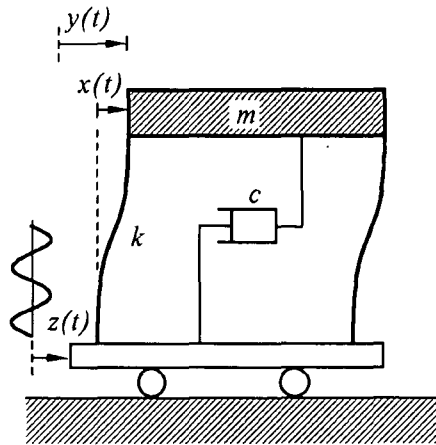


図-2.3.7 基盤加振による1質点系の強制振動

$y = z + x$   
 ↑            ↑            ↑  
 絶対変位    地盤変位    相対変位

であるから、運動方程式は

$$m(\ddot{x} + \ddot{z}) + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.3.19a)$$

あるいは

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{z} \quad (2.3.19b)$$

となる。これは、地盤加速度に1自由度系の質量を乗じた慣性力が逆方向に作用するとみなすことにより基盤入力の場合の解析が出来ることを示している。

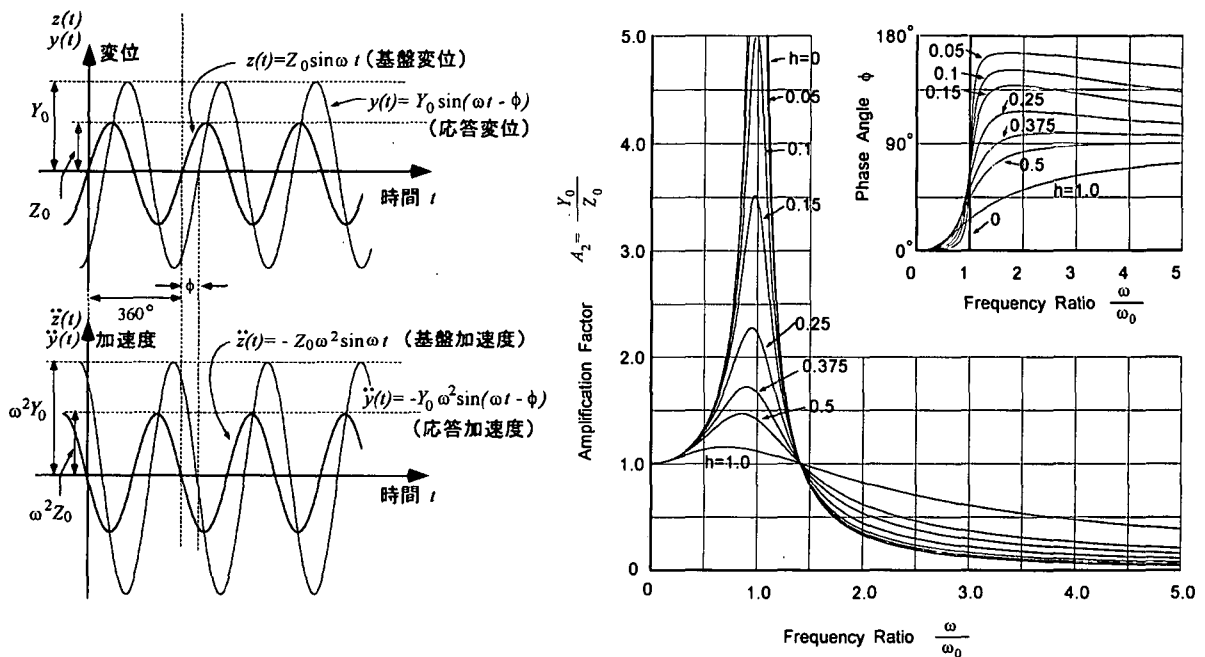


図-2.3.8 基盤加振時の動的応答倍率と位相曲線

さらに、式(2.3.19)に両辺  $1/m$  と乗じると、2.3.1 項で示したように

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = -\ddot{z} \quad (2.3.20)$$

となる。

支点の変位が円振動数  $\omega$ 、振幅  $Z_0$  の正弦波であるとしてこれを式(2.3.19)または式(2.3.20)に代入すれば、ここで解くべき運動方程式が得られる。この場合の動的応答倍率  $A_2$  は、応答の絶対変位（または絶対加速度）が、それぞれ支点の変位（または加速度）の何倍になるかを示すものである。図-2.3.8 に動的応答倍率  $A_2$  に基づく共振曲線および位相曲線を示す。これらは、強制外力加振の場合の共振曲線および位相曲線と類似しているものの、同一ではないことに注意すべきである。

特に地震時応答を考える場合には地震による慣性力は絶対加速度に比例する量であることから、重要な意味を持っている。特に、応答倍率が、定常応答時の応答と入力加速度振幅の比を与えている。すなわち、

$$\frac{\ddot{y}_{\max}}{\ddot{z}_{\max}} = A_2 \quad (2.3.21)$$

これより、入力の振動数が  $\omega \ll \omega_0$  の場合には  $A_2$  は 1 付近の値を取ることから、入力加速度による荷重は静的荷重によるものと同様であることがわかる。これに対し、 $\omega$  が  $\omega_0$  に近い場合には、動的な効果が静的な荷重効果を大きく上回ることとなり、振動が非常に重要となる状態となる。また、 $\omega \gg \omega_0$  の場合には、逆に  $A_2 < 1$  となることから、入力加速度に比べて応答加速度が低減されることになる。

このように、構造物を故意に長周期化して  $\omega_0$  を小さくすることにより応答倍率、すなわち応答加速度・地震力を抑えるという手法が方法論として考えられることになる。いわゆる柔構造や免震設計などの概念は、この理論に基づくものと見ることができる。ただし、 $\omega \gg \omega_0$  の条件を十分に満足していない場合、周期の長い構造物は応答変位が大きくなる傾向があることから、十分な検討が必要である。

上の共振曲線の場合、 $\omega/\omega_0=1$  の時の応答倍率は次式のようなになる。

$$\left| \frac{Y_0}{Z_0} \right| = \sqrt{\frac{1+4h^2}{4h^2}} \quad (2.3.22)$$

強制外力のケースと同様、共振時の応答は減衰定数  $h$  が小さい領域ではほぼ  $h$  に反比例する関係となることがわかる。構造物の応答を考える上では減衰定数は非常に重要なパラメータであり、地震時応答の低減のために特別な装置を用いて構造物の減衰定数を増加させる方法も用いられるようになっている。

#### 2.3.4 地震応答スペクトル

これまでは調和入力、すなわち正弦波入力の場合について考えてきたが、地震波は不規則な波形をしており、その中には種々の周波数成分が含まれている。振動モデルの応答はその固有振動数と入力に含まれている周波数成分により大きく変化する。応答スペクトルは、ある地震波に対する 1 自由度系の最大応答の形で構造物の応答の大きさを評価するためのものである。

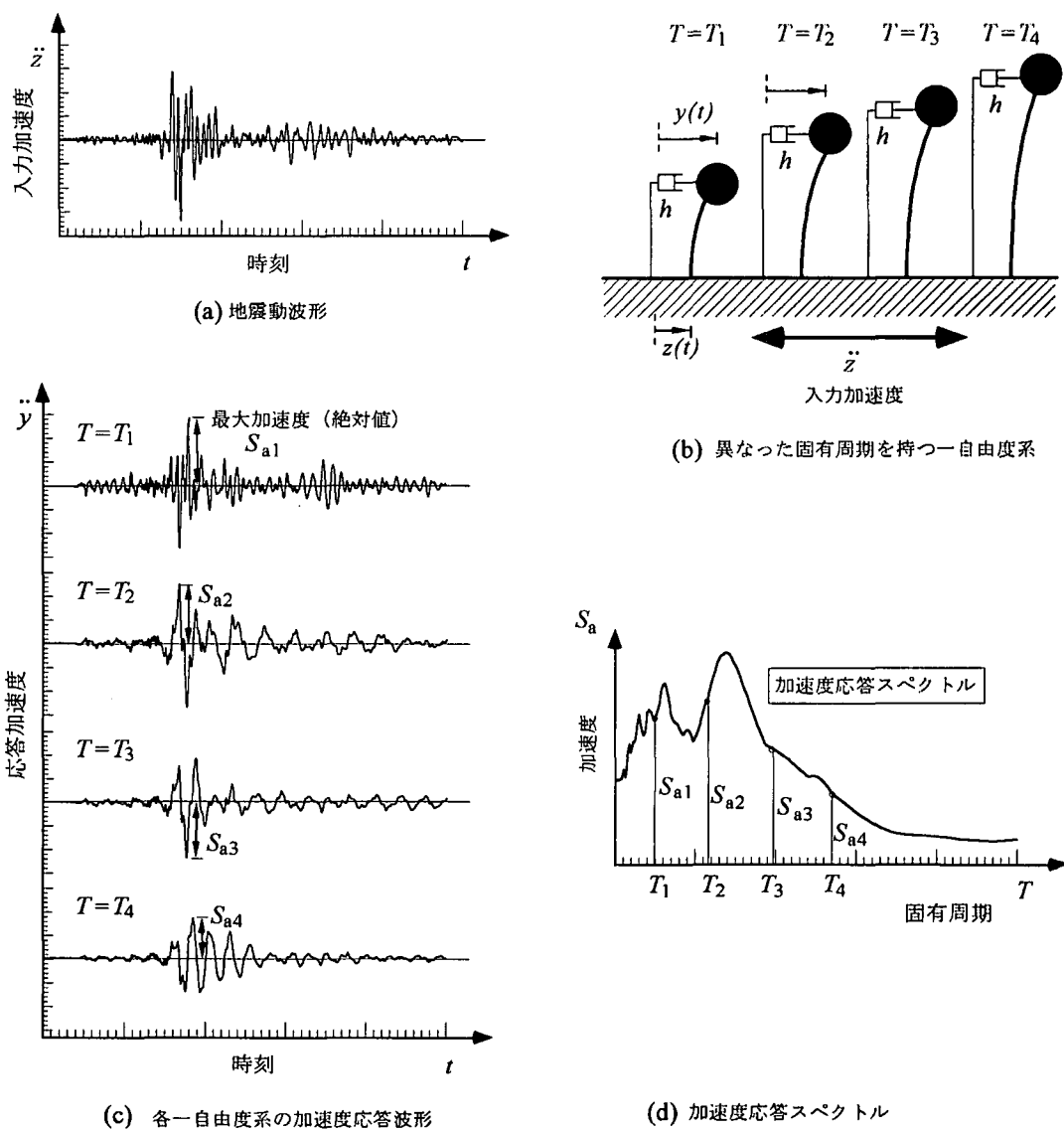


図-2.3.9 地震応答スペクトル

図-2.3.9 は応答スペクトルの概念を図示したものである。基盤の上に減衰が等しく固有周期の異なる1自由度系を固定し、この基盤が特定の地震波により動かされるものとする。このとき、各々の1自由度系が応答を示すが、この時の応答加速度の最大値と各1自由度系の固有振動数の関係を図示すると、(d)に示すような曲線が得られる。これを加速度応答スペクトルという。同様に変位応答、速度応答について得られる曲線は、それぞれ変位応答スペクトル、速度応答スペクトルと呼ぶ。

実際の応答スペクトルの計算においては、少しずつ1自由度系の固有振動数を変化させながら、計算機により基盤入力の場合の運動方程式に対して数値的な逐次時間積分を行い、時刻歴応答を求める方法を用いる。設定した減衰定数の値により異なる応答スペクトルが得られるが、一般に  $h=0.05$  の場合を標準的に計算することが多い。なお、耐震設計においては、想定する地震がこの応答スペクトル（またはこの考え方に基づくもの）の形で与えられるケースも多い。

## 2.4 多自由度系の線形応答

橋梁などの動的解析を行うには、単純な橋脚を解析する場合を除き、多自由度系にモデル化するのが一般的である。多自由度系の運動方程式は  $N$  自由度系であれば  $N$  元の連立方程式を解くことになる。計算機の発達でこのような計算も容易にできるようになってきた。しかし、多自由度系の応答を理解する上で、固有値解析（モード解析法）の意義は大きい。

2.4 節では、多自由度系の運動方程式からその解法までを、なるべく式を省いてわかりやすく記述する。詳細な式の誘導は付属資料 2 に詳しく述べるので、興味のある方は参考にしてもらいたい。

### 2.4.1 運動方程式

#### (1) 自由度

3次元空間に存在する1個の物体は  $x, y, z$  方向の並進運動と、 $x, y, z$  三軸まわりの回転運動が可能である。このときの物体の自由度は「6」であるという。自由度は力学系の運動を記述する座標の数と考えられる。しかし座標間に拘束条件が存在する場合には、自由度は減少する。例えば図-2.4.1 に示すように紙面内を運動している単振り子を考える。質点（おもり）の位置は  $x, y$  座標系で見れば自由度は2に見えるが、 $x_1$  と  $y_1$  の間には  $x_1^2 + y_1^2 = l^2$  なる関係が存在するので自由度は1となる。この場合、鉛直方向からの振れ角  $\theta$  で運動を考えれば、 $x_1 = l \sin \theta$ 、 $y_1 = l \cos \theta$  となり、座標は  $\theta$  の1つで足りることが分かる。このような独立な座標を一般座標という。

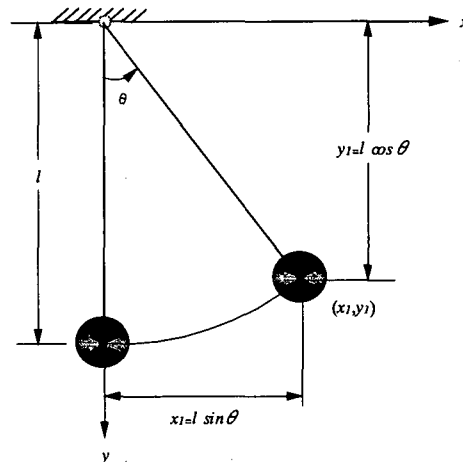


図-2.4.1 単振り子の自由度

#### (2) 運動方程式

運動方程式を導く方法としては、いくつか考えられるが、ここではラグランジェの運動方程式を用いる方法を説明する。これは一般座標（自由度）で表した振動系の運動方程式の作成に利用される。

$N$  自由度系の一般座標が  $q_s$  ( $s=1, 2, \dots, N$ ) とする。その運動エネルギーを  $K$ 、ひずみエネルギーを  $V$ 、一般座標  $q_s$  に対する一般力を  $Q_s$  とすると、一般座標  $q_s$  に対して以下の関係が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_s} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial V}{\partial q_s} = Q_s \quad (2.4.1)$$

$$s=1,2,\dots,N$$

この式をラグランジェの運動方程式と呼ぶ。地震動が作用する構造物の解析では外力  $Q_s$  は慣性力となる。  $K-V=L$  とおけば、(2.4.1)式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} = Q_s \quad (2.4.2)$$

この  $L$  をラグランジェ関数という。

### (3)例題 — 3自由度系 —

図-2.4.2 に示す構造物を例にとり、ラグランジェの運動方程式を利用して多自由度系の運動方程式を求める。上部工および基礎の水平変位  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\theta$  を一般座標とする。

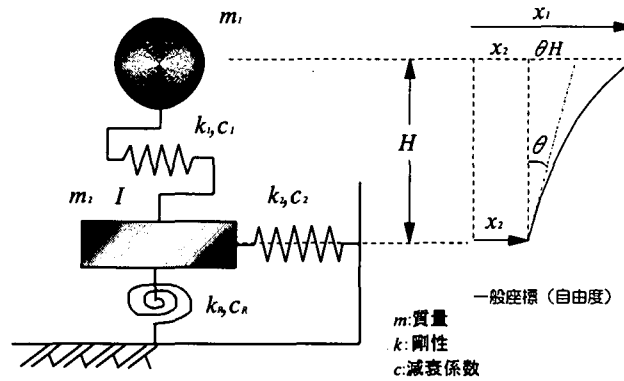


図-2.4.2 多自由度系の例 (3自由度系モデル)

運動エネルギー  $K$  は次式で表される。

$$K = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (2.4.3)$$

系のひずみエネルギー  $V$  は次式で表される。

$$V = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - x_2 - \theta H)^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \frac{1}{2} k_R \theta^2 \quad (2.4.4)$$

散逸関数  $F$  は次式で表される。

$$F = \frac{1}{2} c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \dot{\theta} H)^2 + \frac{1}{2} c_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} c_R \dot{\theta}^2 \quad (2.4.5)$$

一般力 (慣性力)  $Q_s$  は、 $x_1$  に対しては

$$Q_1 = -m_1 \ddot{z} \quad (2.4.6)$$

一般座標  $x_2$  に対しては

$$Q_2 = -m_2 \ddot{z} \quad (2.4.7)$$

となる。これらを式(2.4.1) または(2.4.2)に代入すれば

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \dot{\theta} H) + k_1 (x_1 - x_2 - \theta H) = -m_1 \ddot{z} \quad (2.4.8)$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \dot{\theta}H) + c_2\dot{x}_2 - k_1(x_1 - x_2 - \theta H) + k_2x_2 = -m_2\ddot{z} \quad (2.4.9)$$

$$I\ddot{\theta} - c_1H(\dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \dot{\theta}H) + c_R\dot{\theta} - k_1H(x_1 - x_2 - \theta H) + k_R\theta = 0 \quad (2.4.10)$$

上式をマトリクスの形で表記すれば

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = -[M]\{\ddot{z}\} \quad (2.4.11)$$

となる。ここに、 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ はそれぞれ質量マトリクス、減衰マトリクス、剛性マトリクス、 $\{1\}$ は地震動の入力方向を示す1と0からなる行列、 $\ddot{z}$ は地震動加速度である。式(2.4.11)が地震入力を受ける多自由度系の運動方程式である。

## 2.4.2 多自由度系の非減衰自由振動

### (1) 固有値解析

構造物の周期により地震応答が大きく異なることが2.3節より分かる。特に、構造物の固有周期と入力の周期が一致すると、共振現象によりその応答値が非常に大きくなる。橋梁・高架橋等の耐震設計を考えた場合、構造物の固有振動数やその振動モードを把握することが重要になるといえる。そこで、多自由度系の固有周期や振動モードを求める必要がある。それが固有値解析である。

減衰のない多自由度系の自由振動の運動方程式は式(2.4.11)を参考に

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (2.4.12)$$

と表される。(2.4.12)式の解は $\{x\} = \{\phi\}e^{i\omega t}$ のようにおくことができる。これを式(2.4.12)に代入すると、

$$(-\omega^2[M] + [K])\{\phi\} = \{0\} \quad (2.4.13)$$

となる。式(2.4.13)を満足する $\omega^2$ および $\{\phi\}$ を求める問題は一般固有値問題と呼ばれる。 $\{\phi\} = \{0\}$ という解は、静止状態を表すので、振動問題では興味のない解である。そこで、 $\{\phi\} = \{0\}$ 以外の解を持つためには、係数行列式が0でなければならないから、

$$|-\omega^2[M] + [K]| = 0 \quad (2.4.14)$$

となる。 $N$ 自由度系ならば式(2.4.14)を満足する $\omega^2$ (「固有値」とよぶ)は $N$ 個( $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2$ )求まる。

$\omega$ の小さい方から順に、1次、2次、 $\dots$ 、 $N$ 次の固有円振動数(rad/sec)と呼ぶ。また、固有円振動数 $\omega_i$ より、固有振動数 $f_i$ (Hz)および固有周期 $T_i$ (sec)は以下のように求められる。

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad (f_1 < f_2 < \dots < f_N) \quad (2.4.15)$$

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} = \frac{1}{f_i} \quad (T_1 > T_2 > \dots > T_N) \quad (2.4.16)$$

また、各 $\omega_i$ に対して、式(2.4.13)を満足するベクトル

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{Bmatrix}_1, \quad \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{Bmatrix}_2, \quad \dots, \quad \{\phi\}_N = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{Bmatrix}_N \quad (2.4.17)$$

をそれぞれ1次, 2次, ...,  $N$  次の固有モード (あるいは固有ベクトル) と呼ぶ. 固有モード  $\{\phi\}_i$  の値は各要素の絶対量を示すものでなく, その相対的な比率 (=振動形状) だけを定めるものである. つまり, 固有モード  $\{\phi\}_i$  は固有振動数  $\omega_i$  で自由に振動している構造物の振動型を示している.

図-2.4.3 に示すように, 2個の重りが付いた振り子を例に用いて, 固有振動数と固有振動モードの意味を示す. この振り子は2自由度系である. よって, 固有振動数と固有モードが2個存在する ( $\omega_1$ と $\{\phi\}_1$ ,  $\omega_2$ と $\{\phi\}_2$ ). 支点をゆっくり動かすと, ①と②の重りは同じ方向に動き, 支点を早く動かすと①と②の重りは反対方向の動きをすることは, 多くの人々が経験しているであろう. この「ゆっくり」「はやく」というのが固有振動数  $\omega_i$  (=固有周期  $T_i$ ) であり, 「同じ方向に動く形」「反対方向に動く形」という振動の形状が振動モード  $\{\phi\}_i$  に他ならない.

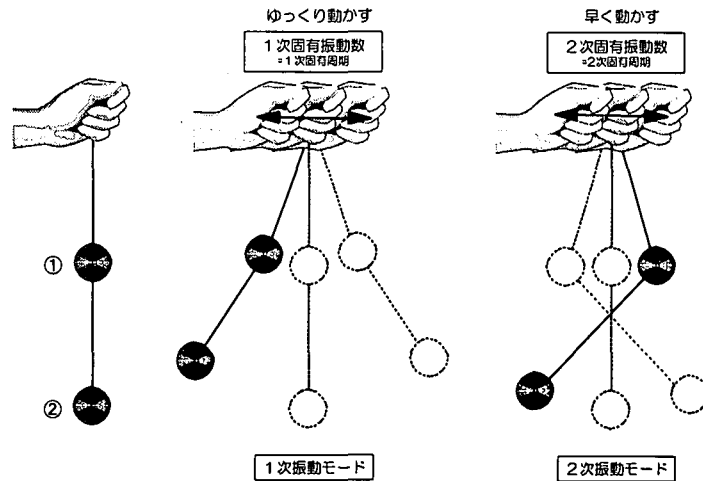


図-2.4.3 固有振動数と固有モードの意味 (2自由度系を例にして)

### 2.4.3 モード解析法

固有ベクトル  $\{\phi\}_i$  には, 直交性という重要な性質がある. この性質を利用すると, 線形の場合は多自由度系の地震応答解析を簡略化することが可能である. 詳細な式の誘導は付録に示す.

地震動を受けたときの多自由度系 (簡単のため, 非減衰とする) の運動方程式は式(2.4.11) で示したように次式で表せる.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = -[M]\{\ddot{z}\} \quad (2.4.18)$$

記号は式(2.4.11)を参照. (2.4.18)式の解  $\{x(t)\}$  を固有モード  $\{\phi\}_i$  の線形和と考える.

$$\{x(t)\} = [\Phi]\{q\} = \{\phi\}_1 q_1(t) + \{\phi\}_2 q_2(t) + \dots + \{\phi\}_N q_N(t) \quad (2.4.19)$$

物理的には, 地震時の構造物の応答  $\{x\}$  は  $N$  個の独立な固有モードの重ね合わせとして考え,



その重みとして時間関数  $q_s(t)$  を各モードの振幅として導入したものと考えられる。特に  $q_s$  を規準座標と呼ぶ。

例えば、式(2.4.19)の  $\{\phi\}_1 \times q_1(t)$  は、図-2.4.4 に示すように、形状(比率)を保ったまま時間とともに  $q_1(t)$  倍されながら振動することを意味している。これを  $N$  個のモードについて重ね合わせると全体としての振動になることを式(2.4.19)は意味している。

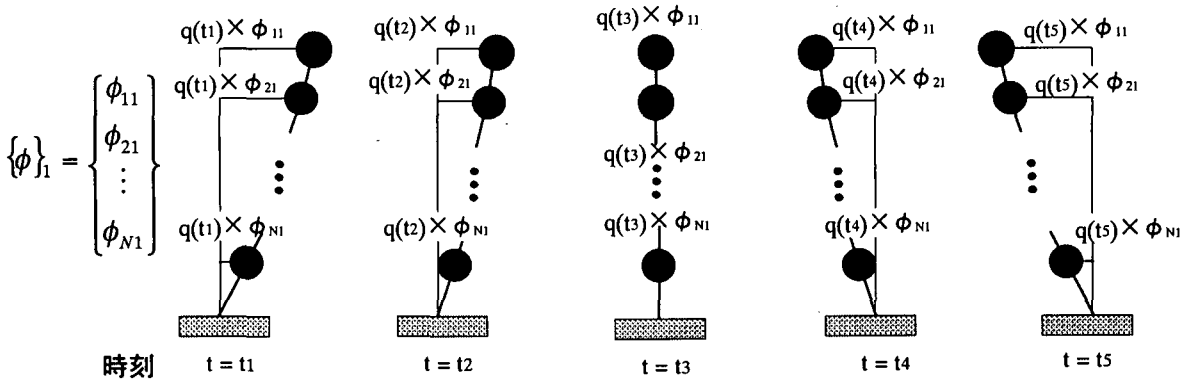


図-2.4.4 規準振動形

式(2.4.19) を式(2.4.18)に代入し、固有モードの直交性の性質を利用してマトリクス計算を行うと、最終的には多自由度系の運動方程式(2.4.18)は規準座標  $q_s$  に関する  $N$  個の連立方程式(2.4.20)に分解することができる。

$$M_s \ddot{q}_s + K_s q_s = -\{\phi\}_s^T [M] \{h\} \ddot{z} \quad (2.4.20)$$

$$s = 1, 2, \dots, N$$

ここで、 $M_s$  を一般化質量、 $K_s$  を一般化剛性という。さらに、両辺を  $M_s$  で割ると、

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \frac{-\{\phi\}_1^T [M] \{h\} \ddot{z}}{M_1} \\ \vdots \\ \ddot{q}_N + \omega_N^2 q_N = \frac{-\{\phi\}_N^T [M] \{h\} \ddot{z}}{M_N} \end{cases} \quad (2.4.21)$$

となる。 $\omega_s$  は  $s$  次モードの固有円振動数である。これは 2.3 節で示した 1 自由度系の運動方程式(2.3.20)と同じ形をしており (ただし  $c=0$ )、 $N$  自由度系の運動方程式が  $N$  個の 1 自由度系の運動方程式に分解できたことになる。ただし、右辺の入力地震波  $\ddot{z}$  が  $\beta_s$  倍されている。

$$\beta_s = \frac{-\{\phi\}_s^T [M] \{h\}}{M_s} \quad (2.4.22)$$

この倍率に相当する値  $\beta_s$  を刺激係数という。刺激係数とは、地震動  $\ddot{z}$  のうち、それぞれのモードに参与し、これを刺激する割合を表す指標である。刺激係数の大きさによって、地震時にどのモードが支配的になるか把握することが可能である。

## 2.4.4 減衰マトリクス

2.4.3 では減衰を考えていないが，減衰を考慮した場合にも同様の考え方ができる．運動方程式は

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = -[M]\{h\}\ddot{z} \quad (2.4.23)$$

となる．減衰マトリクス[C]にある仮定をおくと，固有モードは減衰マトリクス[C]についても直交性が成り立つ．よって，式(2.4.23)の  $N$  自由度系の運動方程式は式(2.4.24)のように  $N$  個の 1 自由度系の運動方程式に分解できる．

$$\ddot{q}_s + 2h_s\omega_s\dot{q}_s + \omega_s^2q_s = \frac{-\{\phi\}_s^T [M] \{h\}}{M_s} \ddot{z} \quad (2.4.24)$$

$h_s$  は  $s$  次モードの減衰定数である．ところで，減衰マトリクス[C]にある仮定をおくと述べた．それは，比例減衰という仮定である．

$$[C] = a_0[M] + a_1[K] \quad (2.4.25)$$

$a_0$ ,  $a_1$  は比例係数である．これをレーリー減衰(その他，質量比例減衰[C]= $a_0$ [M]，剛性比例減衰[C]= $a_1$ [K]などがよく用いられる)という．このようにすると減衰マトリクス[C]についても固有モードの直交性が成り立つ．式(2.4.24)の  $s$  次モードの減衰定数  $h_s$  は，レーリー減衰の場合，次のようになる．

$$h_s = \frac{1}{2}(a_0/\omega_s + a_1 \cdot \omega_s) \quad (2.4.26)$$

特に，質量比例の場合は減衰定数は  $a_1=0$  なので固有振動数に反比例し，剛性比例の場合は  $a_0=0$  なので固有振動数に比例することが容易に分かる．つまり，剛性比例では高次のモードの減衰定数が大きくなり，全体の応答にしめる高次モードの影響が相対的に小さくなることになる．設計実務における動的解析においては，特に非線形解析では計算の収束性の観点から，剛性比例型の減衰を設定する場合が有利なことがある．図-2.4.5 に減衰マトリクスの考え方の違いを概念的に示す．

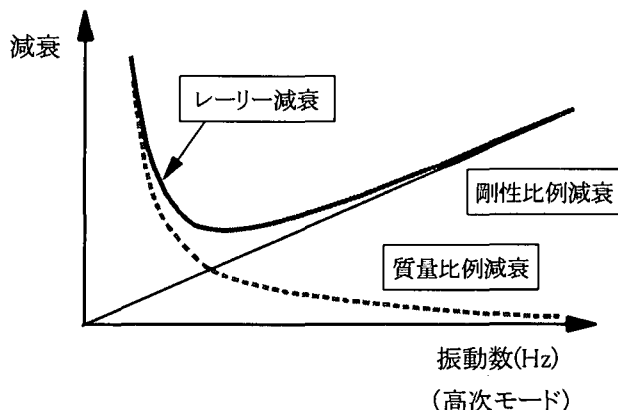


図-2.4.5 減衰マトリクスによる違い

さて，構造物の振動解析では，減衰の細かいメカニズムはよく分からないことが多く，各次のモード減衰を実験・解析等により定め，これに応じた減衰マトリクス[C]を作成する方

法がしばしば用いられる。例えば、1次と2次の減衰定数  $h_1, h_2$  を与えた場合、以下の連立方程式を解いて  $a_0, a_1$  が定まる。

$$a_0 = \frac{2\omega_1\omega_2(h_1\omega_2 - h_2\omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (2.4.27)$$

$$a_1 = \frac{2(h_2\omega_2 - h_1\omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (2.4.28)$$

その他、構造物の各部分が任意の異なる減衰性能を有する場合、減衰マトリクスは比例減衰の条件を満たさず（非比例減衰）、このような問題は複素固有値問題に帰着される。

図-2.4.6 に3自由度系の構造物を例に取り、応答解析におけるモード解析法の意味を概念的に示す。まず、2.4.2 項に従い3自由度系（構造物）の固有値解析を行うと、その固有振動数  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  および振動モード  $\{\phi\}_1, \{\phi\}_2, \{\phi\}_3$  が得られる。次に、式(2.4.24)に示したように、固有振動数がそれぞれ  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  で、減衰定数が  $h_1, h_2, h_3$  となるような1自由度系の構造物を想定し、それぞれの構造物に地震波  $\ddot{z}$  を  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  倍したものが入力されたと考えてその応答値  $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$  を算定する。すると、1次モードの寄与は、振動モード  $\{\phi\}_1$  が  $q_1(t)$  倍されたと考えることにより得られる。それらを全モード1～3まで重ね合わせることで地震時の構造物の応答となるわけである。

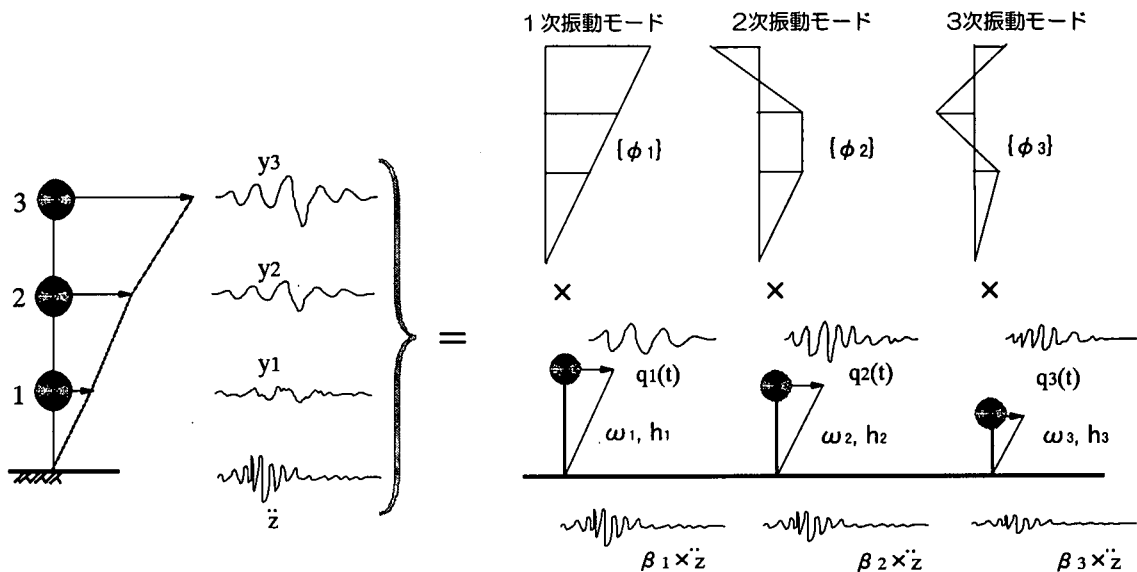


図-2.4.6 モーダルアナリシスによる地震応答の意味

多自由度系の強制振動におけるモード解析法について述べてきたが、その基本は固有モードの直交性にあり、 $N$  元の連立方程式からなる多自由度系の運動方程式が最終的には独立な1自由度系の運動方程式に帰着できるところに特徴がある。一般的な土木構造物では、高次のモードが重要とならないことも多く、不要なモードを省略して解析することも可能である。

### 2.4.5 例題

ここでは、以上で述べた内容について、例題を通して再確認する。対象とするモデルは図-2.4.7 に示す2自由度系である。このモデルに対して、固有値解析を行うと、固有周期および固有モードが図-2.4.7 のように得られる。

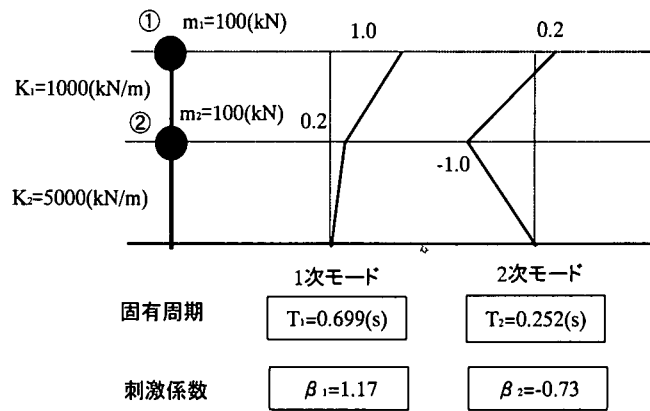


図-2.4.7 解析モデルと固有値解析結果

次に、式(2.4.24)に従って、固有周期  $T_1=0.699(\text{s})$ 、 $T_2=0.252(\text{s})$ 、モード減衰定数  $h_1=h_2=0.05$  となるような1自由度系のモデルを想定し、地震波を  $\beta_1$ 、 $\beta_2$  倍したものを入力して応答解析を行った。その結果が図-2.4.8 である。

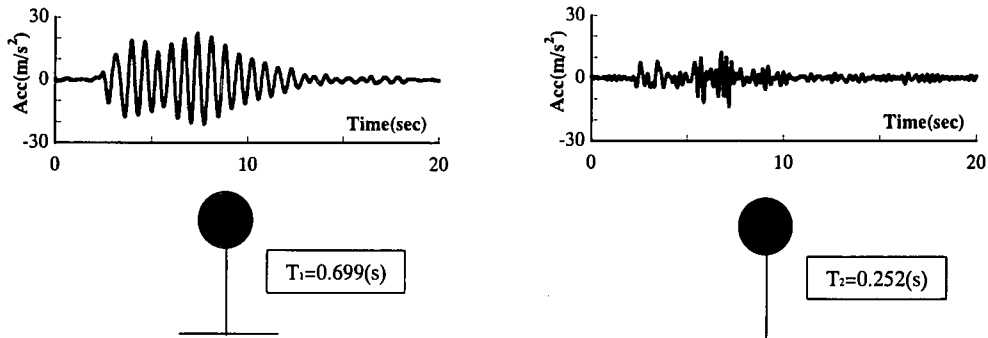


図-2.4.8 規準振動  $q_i(t)$

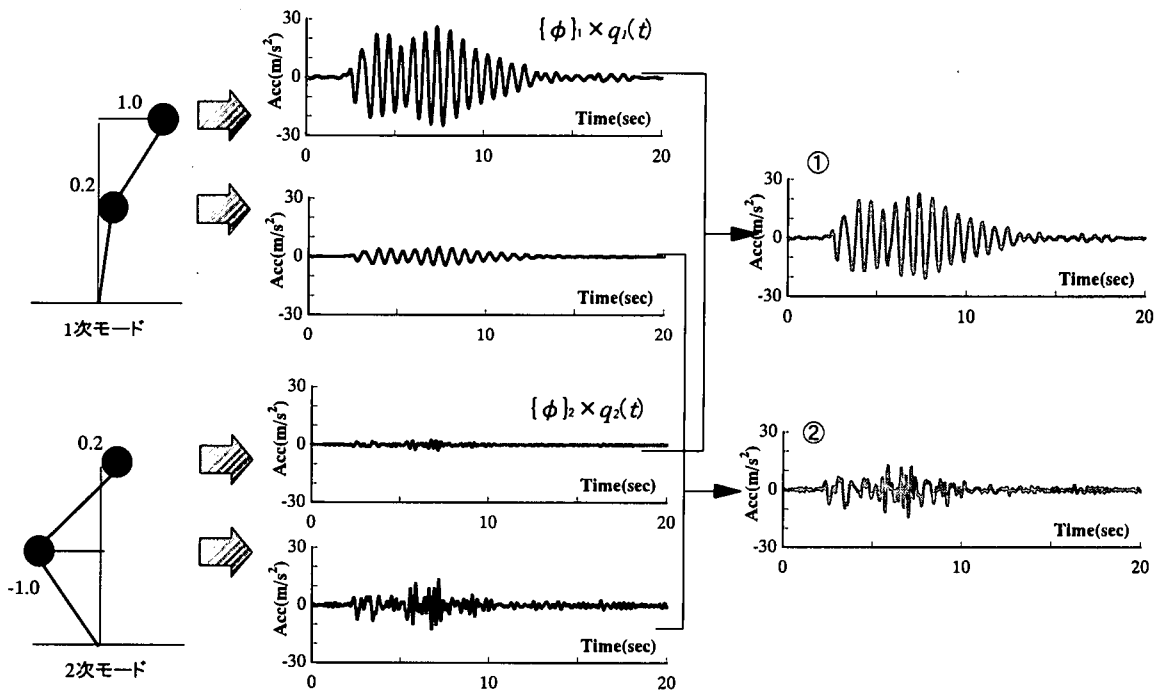


図-2.4.9 モーダルアナリシスによる応答値の算定結果

これらの結果を用いて式(2.4.19)に従って重ね合わせると図-2.4.9のように各自由度に対する地震応答が得られる。重り①の加速度応答は1次モードが支配的であるが、重り②の加速度応答は2次モードが支配的であることが分かる。

このように、ものの揺れ方を見る場合には、複雑なものでも1自由度系の応答から全体系の応答（揺れ方）が推測できることが分かる。モード解析法の意義が理解できれば、今後、耐震実務を行う上でも大きな武器になると思われる。

## 2.5 構造物の弾塑性応答

構造物は、変形が小さい間はほぼ弾性とみなせるが、変形が大きくなると亀裂、降伏、すべり等を生じ、復元力と変形の関係はループ（履歴ループ）を描くようになる。レベル2地震動のように大加速度を対象とした場合には、構造物の応答が塑性領域に及ぶことは避けられない。2.5節では、1自由度系を例にとり、弾塑性応答に関する基本的な特性について述べる。

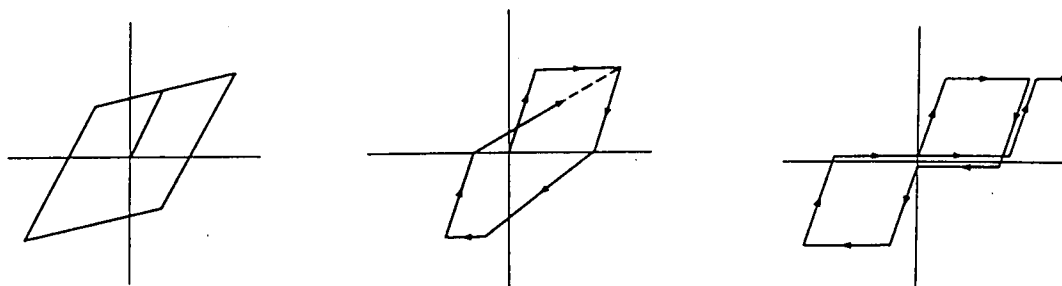
### 2.5.1 弾塑性復元力特性

地震動に対する1自由度弾塑性系の運動方程式は次式で表される。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Q(x) = -m\ddot{z} \quad (2.5.1)$$

$m$ は質量、 $c$ は減衰係数、 $x$ は相対変位、 $z$ は地震動加速度である。 $Q(x)$ は復元力特性と呼ばれるもので変形履歴だけの関数である。構造物の変形が小さい範囲ではほぼ弾性とみなせるが、変形が大きくなると部分的にクラックや塑性化などによる損傷が累積し、復元力と変形の関係は履歴ループを描く。このような弾塑性復元力特性あるいは履歴特性（これらをまとめて、本テキストでは非線形履歴モデルと呼ぶ）を適切に設定することが構造物の応答性状を弾塑性応答解析によって把握する場合に重要である。

弾塑性応答解析に用いる非線形履歴モデルは、対象となる材料・構造に応じて種々提案されている。例えば、最も基本的な形状の例として図-2.5.1のような3つのタイプが挙げられる。(a)のバイリニア型は変形性能つまり粘りに富んだ構造物の特性として広く用いられる。鋼構造物をモデル化するときによく使われるモデルである。履歴ループによるエネルギー消費が大きい特徴を有している。(b)の剛性低下型は、一度塑性変形を経験すると同一ループを描かず、次第に剛性が低下していく。鉄筋コンクリート構造物をモデル化する場合によく使われる。(c)のスリップ型は、復元力の小さい範囲での戻り剛性が小さく、履歴ループに



(a)バイリニア型

(b)剛性低下型

(c)スリップ型

図-2.5.1 復元力モデルの例

よる消費エネルギーは小さい。このように非線形履歴モデルを決定するには、その骨格曲線（スケルトンカーブ）と履歴法則が必要である。なお、非線形履歴モデルによる相違によって応答値がどの程度変化するかを2.5.3項に示した。

### 2.5.2 地震に対する弾塑性応答

地震動に対する弾塑性系の運動方程式は式(2.5.1)で表される。式(2.5.1)を解くには数値積分によって行われる。

図-2.5.2 は兵庫県南部地震で神戸海洋気象台で観測された波形に対する1自由度系の弾塑性応答の例である。構造物の固有周期  $T=0.5(s)$ 、降伏震度  $k_{hy}=0.4$ 、減衰定数  $h=0.05$  とした場合である。履歴モデルはクラフ(Clough)型を用いた。比較のために弾性解析の結果も示している。加速度波形をみると、弾塑性応答の場合には、応答加速度は降伏震度相当で頭打ちとなり  $500(gal)$ 程度しか発生していないことが分かる。線形の場合よりも大幅に低減されている。しかも塑性化により周期が弾性応答の場合よりも伸びている。一方、変位応答をみると、線形の場合よりも大きく、波形が一方にずれて残留変形が生じている。

構造物が塑性化すると、その挙動は弾性的の場合に比べて大きく異なることが理解できる。どのように弾性的の場合と異なるのか理解することが重要であろう。

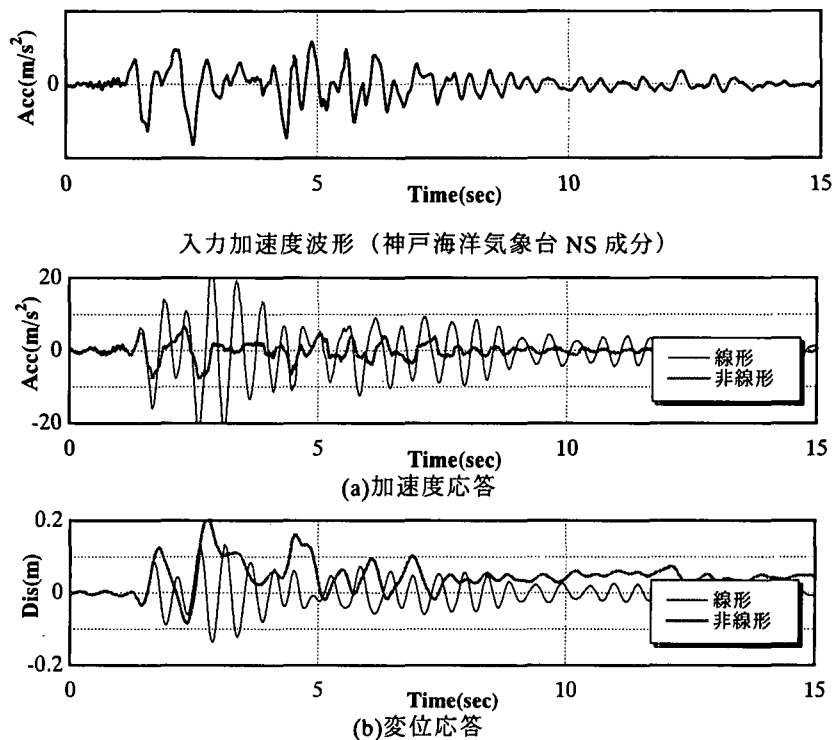


図-2.5.2 1自由度系の弾塑性応答解析結果の例

### 2.5.3 弾性応答と弾塑性応答の比較

弾塑性応答では、しばしばその最大変位もしくは塑性率に注目される。塑性率とは、最大応答変位を降伏変位で除した値である。そこで、ここでは最大変位の基本的な性質について述べる。構造物の初期周期  $T$  を一定 ( $0.5$  秒と  $0.8$  秒) として、降伏耐力を変化させたとき、最大応答変位がどのように変化するかを示したのが図-2.5.3 である (履歴モデルはバイリニアモデルで、第2勾配は  $0\%$ )。縦軸に降伏震度 ( $=Q_y/W$ ,  $Q_y$ : 降伏荷重,  $W$ : 重量), 横軸

に最大変位をとって示してある。なお図中には弾性応答を点線で示してある。入力地震動は神戸海洋気象台 NS 成分（最大加速度 818gal）である。T=0.5 秒の構造物では、降伏震度の低下とともに最大変形は増加する傾向にあり、弾性的場合よりもかなり大きく変形している。一方、T=0.8 秒の構造物では降伏力がある限度以上であれば、最大変形は弾性変形とあまり変わらない値となっている。

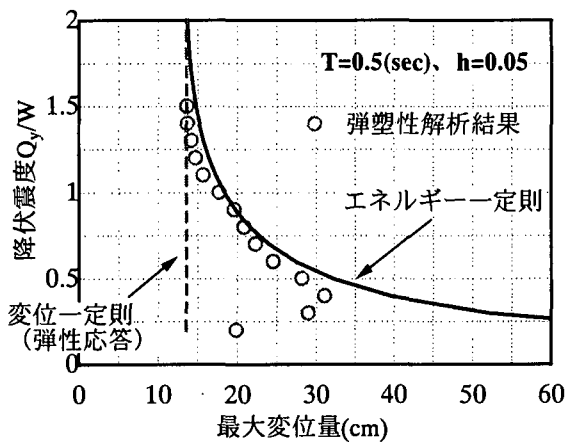
このような特性に基づき、弾塑性応答量を弾性応答量から推測する方法としてエネルギー一定則と変位一定則がよく用いられている。

(a)エネルギー一定則（図-2.5.4(a)参照）

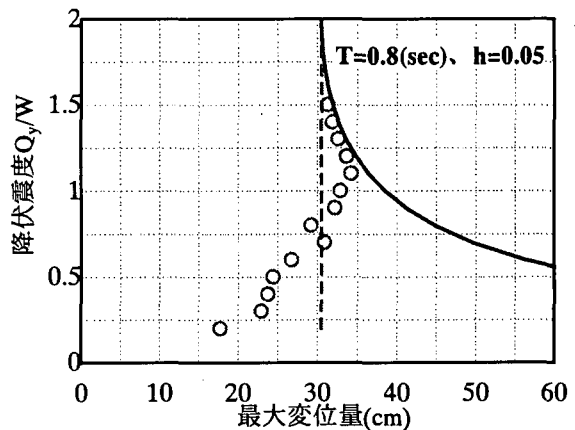
比較的短周期の範囲では、初期周期の等しい弾性系の最大ひずみエネルギー（図中△OAD）と弾塑性ひずみエネルギー（図中台形 OBCE）とは降伏力によらずほぼ等しい、と考えるものである。つまり（△OAD の面積）=（台形 OBCE）となる。図-2.5.3 を見ると、短周期の場合には、概ねエネルギー一定則が成り立っていると言える。しかし、降伏震度が 0.5 以下になると、傾向が大きはずれている。

(b)変位一定則（図-2.5.4(b)参照）

比較的長周期の範囲では、降伏力がある限度以上なら、図-2.5.4(b)に示すように、弾塑性系の最大変形は初期周期の等しい弾性系の最大変形とほぼ等しい、と考えるものである。図-2.5.3 を見ると、長周期の方が、変位一定則をとる傾向にあると言える。

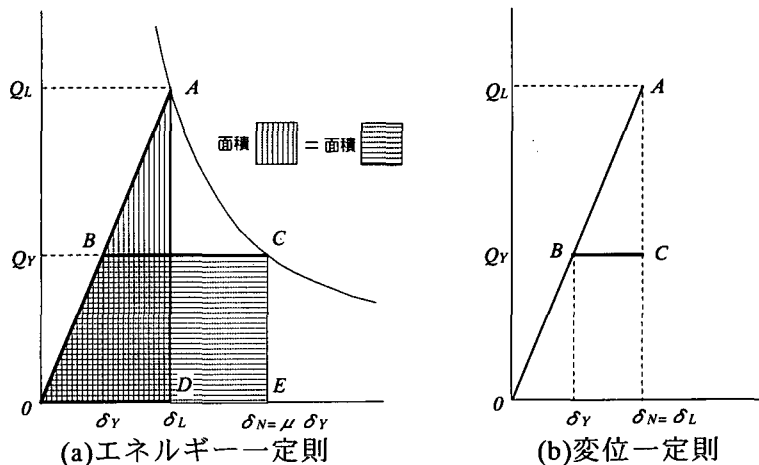


(a) 固有周期 T=0.5(s)



(b) 固有周期 T=0.8(s)

図-2.5.3 降伏耐力を変化させたときの弾塑性系の最大応答変位量



(a)エネルギー一定則

(b)変位一定則

図-2.5.4 エネルギー一定則と変位一定則の考え方

エネルギー一定則および変位一定則は、多くの応答解析の結果から得られた経験則である。これらの関係を用いれば弾性応答量から弾塑性応答量を推定することが可能となり、実用上は便利である。エネルギー一定則および変位一定則における諸量の関係をまとめて表-2.5.1に示す。ただし、これらはいずれも経験則であり、地震動特性や構造物の特性によって大きく異なる場合があることに注意する必要がある。

表-2.5.1 エネルギー一定則と変位一定則

|                    | エネルギー一定則  | 変位一定則               |
|--------------------|---|---------------------|
| 最大変形量 $\delta_y =$ | $\frac{\mu}{\sqrt{2\mu-1}} \delta_L$                                | $\delta_L$          |
| 塑性率 $\mu =$        | $\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{Q_L}{Q_Y} \right)^2 \right\}$ | $\frac{Q_L}{Q_Y}$   |
| 降伏力 $Q_Y =$        | $\frac{1}{\sqrt{2\mu-1}} Q_L$                                       | $\frac{1}{\mu} Q_L$ |

記号は図-2.5.4 を参照

#### 2.5.4 弾塑性応答スペクトル

レベル2地震に対する構造物の耐震設計においては、地震時に構造物が塑性化することを許容することになる。こうした設計において便利のように構造物の弾塑性応答を応答スペクトルとして表したものを弾塑性応答スペクトルという。弾塑性応答スペクトルの形態には様々なものが考えられる。その中でも耐震設計で最も有用であると考えられるのが所要降伏震度スペクトルであろう。

所要降伏震度スペクトルとは、構造物の周期  $T$  をパラメータにして1自由度系の弾塑性応答解析を行い、構造物の応答塑性率がある一定値  $\mu$  になるときの耐力（強度） $Q_y$  を算定し、横軸に固有周期  $T$ 、縦軸にそのときの降伏耐力  $Q_y$  を構造物重量で除した震度  $Q_y/W$  をとったものである。その作り方の概念図を図-2.5.5に示す。応答塑性率を小さくおさめるためには大きな耐力が必要であり、大きな応答塑性率を許容する場合は耐力は小さくて済むことが分かる。

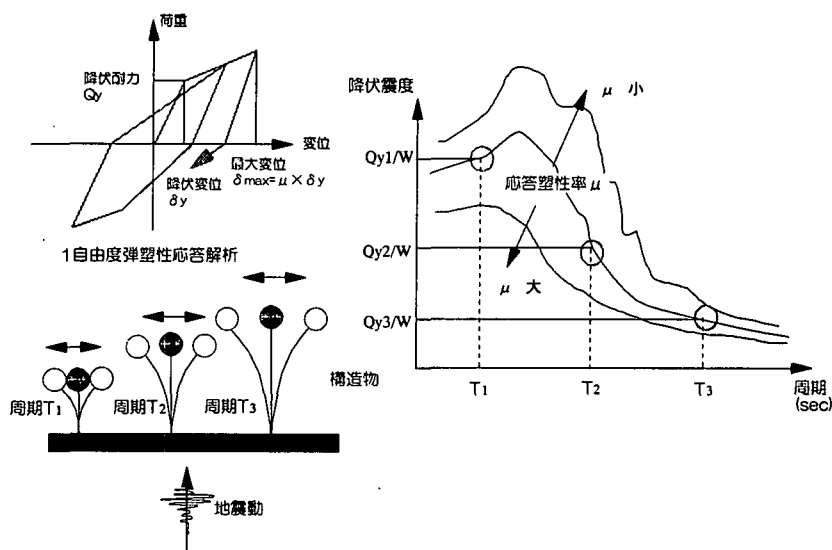


図-2.5.5 必要降伏震度スペクトルの作成方法



必要降伏震度スペクトルには2つの使い方ができる。1)固有周期  $T$  と許容する塑性率（構造物に付与する変形性能）が決まれば構造物にどれだけの耐力を付与したらよいか容易に算定できることになる。2)一方、固有周期  $T$  と降伏耐力が算定された場合に、地震時にその構造物がどれだけの応答塑性率を示すかを算定することが可能となる。

神戸海洋気象台の記録に対して必要降伏震度スペクトルを算定した例を図-2.5.6 に示す。図中には、非線形履歴モデルの相違による影響を見るために、通常の Bi-linear モデル、Clough モデル、原点指向モデルを用いた場合の3つの結果を示している。なお、2次勾配は1次勾配の10%とした。同じ塑性率におさめるためには、履歴吸収エネルギー量大きいバイリニアモデルが最も降伏震度（耐力）が小さくて済み、履歴吸収エネルギー量小さい原点指向型モデルが最も大きな降伏震度を必要とする。このように、履歴モデルの選び方で、弾塑性応答量が大きく異なることが分かる。

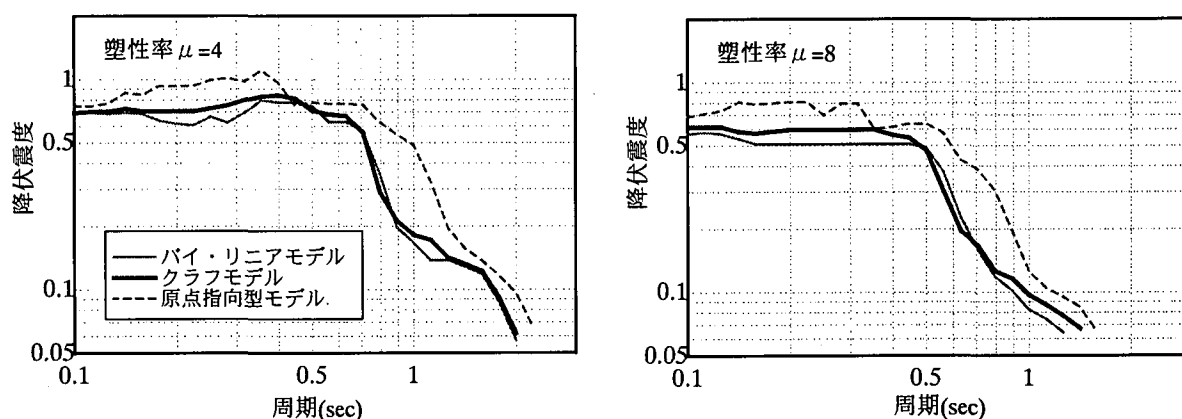


図-2.5.6 必要降伏震度スペクトルの例

またエネルギー一定則や変位一定則との比較をしたのが図-2.5.7 である。なお、弾塑性解析では非線形履歴モデルとしてはバイリニア型を用いている。短周期側でエネルギー一定則が、長周期側で変位一定則が弾塑性応答解析の結果に近いことが分かる。しかし、塑性率が大きい場合や、構造物の周期帯域によっては、弾塑性応答解析の結果と経験則とがかけ離れる場合もあることに注意する必要がある。

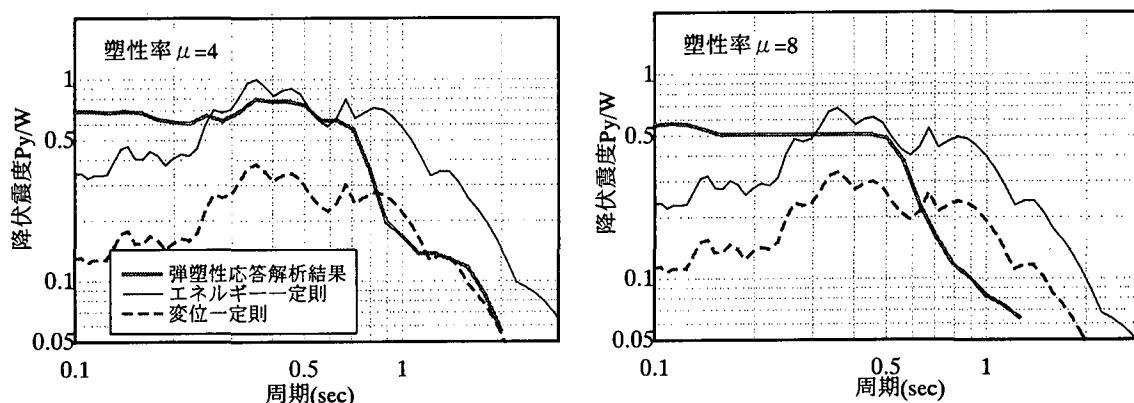


図-2.5.7 弾塑性応答解析の結果とエネルギー一定則、変位一定則との比較

## 2.6 おわりに

本章では、地震時のものの揺れ方について、基本的な事項について解説した。数式は、ものの揺れ方の本質を理解する上で最低限必要なものにとどめ、詳細は付録におさめた。

設計実務で動的解析を行なう機会がますます増える傾向にあり、多くの解析ソフトも市販されている。ユーザーは振動論に関する深い知識がなくても一通りの計算ができるようになってきているようである。しかし、単なるキーパンチャーとならないためにも、振動論の基本的な知識を身につけることが重要である。また、計算上得られた結果を解釈する上でも、ものの揺れ方に関する基礎知識（センス）が必要不可欠であろう。このような観点から、本稿では振動論の基礎知識を理解していただくことを目的にまとめたつもりである。今後の耐震設計実務を行なう上で、少しでも参考になれば幸いである。

なお、紙面の都合上、例題が不足してしまった。また、フーリエ解析やランダム振動に関する解説まで及ばなかった。そこで、本書の内容を補足する入門書として、参考文献を幾つか列挙したので、参照にいただきたい。

### 参考文献

- 1) 国井隆弘：よくわかる構造振動学入門，工学出版，1995.
- 2) 川井忠彦，藤谷義信：振動および応答解析入門（有限要素法の基礎と応用シリーズ5），培風館，1991.
- 3) 平井和男，水田洋司：耐震工学入門，森北出版，1994.
- 4) 山口宏樹：構造振動・制御（テキストシリーズ土木工学8），共立出版，1996.
- 5) 柴田明德：最新・耐震構造解析，森北出版，1981.
- 6) 土木学会：動的解析と耐震設計 第2巻 動的解析の方法，技報堂出版，1989.
- 7) 大崎順彦：新・地震動のスペクトル解析入門，鹿島出版会，1994.

付録

## 2.A.1 1質点系の自由振動解の導出

まず、自由振動の解を次の形に仮定する。

$$x = e^{st} \quad (2.A1)$$

これを式(2.3.1)に代入すると、

$$(ms^2 + cs + k)e^{st} = 0 \quad (2.A2)$$

式(2.A2)を満たす  $s$  は2つ存在し、

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.A3)$$

となる。ここで、2つの  $s$  が一致し重根となるような減衰係数  $c$  を臨界減衰  $c_c$  (**critical damping**) と定義すると、

$$\frac{c_c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0 \quad (2.A4)$$

が成り立つ。ここに、 $\omega_0$  は非減衰固有円振動数である。したがって、

$$c_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_0 \quad (2.A5)$$

この臨界減衰  $c_c$  を用いて、

$$h = \frac{c}{c_c} \quad (2.A6)$$

により無次元数  $h$  を定義する。この減衰係数を無次元化したパラメータ  $h$  を減衰定数 (**damping ratio**) という。これらを用いれば、式(2.1)は

$$s_{1,2} = \left(-h \pm \sqrt{h^2 - 1}\right)\omega_0 \quad (2.A7)$$

と表すことができる。多くの構造物の動的応答の問題では、定義より  $h \geq 0$  である。

i)  $h > 1$  の場合：式(2.A7)を(2.A1)に代入したものは元の微分方程式を満たすが、さらにそれぞれを定数倍したもの、およびそれらを足しあわせたもの（線形和）も運動方程式を満たしている。したがって、任意の定数を  $A, B$  とすると

$$x(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \quad (2.A8)$$

が求める解であり、(2.A7)を代入すれば (2.4)が得られる。

ii)  $h=1$  の場合：この場合は  $s$  が重根となり、 $s_1$  および  $s_2$  の値はともに  $-\omega_0$  となる。そこで、式 (2.A8) において、

$$s_1 = -\omega_0$$

$$s_2 = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} (-\omega_0 + \Delta s)$$

なる極限をとると同時に、係数  $A, B$  は任意である ( $t$  に依らない) ことから

$$A = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( A' - \frac{B'}{\Delta s} \right)$$

$$B = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{B'}{\Delta s}$$

のように選ぶ。ここに、 $A'$  および  $B'$  はともに新たに導入した任意の定数である。これらの極限を計算すれば、解  $x(t)$  は次のようになる。

$$x(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

$$= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left\{ \left( A' - \frac{B'}{\Delta s} \right) e^{-\omega_0 t} + \frac{B'}{\Delta s} e^{(-\omega_0 + \Delta s)t} \right\}$$

$$= A' e^{-\omega_0 t} + B' \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{e^{(-\omega_0 + \Delta s)t} - e^{-\omega_0 t}}{\Delta s}$$

$$= A' e^{-\omega_0 t} + B' \frac{d}{ds} e^{st} \Big|_{s=-\omega_0}$$

$$= A' e^{-\omega_0 t} + B' t e^{-\omega_0 t}$$

任意定数  $A', B'$  をそれぞれ改めて  $A, B$  と呼ぶこととすれば、式(2.3.5)が得られる。

iii)  $h < 1$  の場合：式(2.A7)の平方根の内部が負の値になるので、 $s_1$  および  $s_2$  は次のように表される複素数となる。

$$s_{1,2} = \left( -h \pm i\sqrt{1-h^2} \right) \omega_0$$

ここに、 $i$  は虚数単位である。これを式(2.A8)に代入すると、

$$x(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

$$= Ae^{-h\omega_0 t + i\sqrt{1-h^2}\omega_0 t} + Be^{-h\omega_0 t - i\sqrt{1-h^2}\omega_0 t}$$

$$= e^{-h\omega_0 t} \left( Ae^{i\sqrt{1-h^2}\omega_0 t} + Be^{-i\sqrt{1-h^2}\omega_0 t} \right)$$

ここで、 $A, B$  は複素数の任意の値を取ることができるので、

$$A = A' + iB'$$

$$B = A' - iB'$$

のように選ぶ。ここに、 $A', B'$  は新たに導入した任意の (実数) 定数である。これを代入すると、

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-h\omega_0 t} \left\{ (A' + iB') e^{i\sqrt{1-h^2}\omega_0 t} + (A' - iB') e^{-i\sqrt{1-h^2}\omega_0 t} \right\} \\
&= e^{-h\omega_0 t} \left( 2A' \frac{e^{i\sqrt{1-h^2}\omega_0 t} + e^{-i\sqrt{1-h^2}\omega_0 t}}{2} - 2B' \frac{e^{i\sqrt{1-h^2}\omega_0 t} - e^{-i\sqrt{1-h^2}\omega_0 t}}{2} \right) \\
&= e^{-h\omega_0 t} \left( 2A' \cos \sqrt{1-h^2}\omega_0 t - 2B' \sin \sqrt{1-h^2}\omega_0 t \right)
\end{aligned}$$

任意定数  $2A'$ ,  $-2B'$  をそれぞれ改めて  $B, A$  と呼ぶこととすれば, 式(2.6)が得られる.

## 2.A.2 1質点系の強制外力振動解の導出

強制外力振動応答を表す特解を求めるため, 次のように円振動数  $\omega$  加振力に対して, 同一の振動数の調和応答となるような解の形式を仮定する.

$$x = X e^{i\omega t}, \quad f = F_0 e^{i\omega t} \quad (2.A9)$$

ただし,  $X, F$  は複素数の定数であり,  $|X| = X_0$  である. これらを式(2.3.15)に代入して整理すると,

$$X = \frac{F_0}{(k - m\omega^2) + ic\omega} \quad (2.A10)$$

したがって, この特解を  $x = X_0 \sin(\omega t - \phi)$  の形で表現すれば,

$$X_0 = |X| = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (2.A11)$$

$$\tan \phi = -\frac{\text{Im}(X)}{\text{Re}(X)} = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (2.A12)$$

である. ゆえに, 調和外力応答を記述する式は次のように表される.

$$x(t) = X_1 e^{-h\omega_0 t} \sin(\sqrt{1-h^2}\omega_0 t + \phi_1) + \frac{F_0 \sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (2.A13)$$

ここに,  $X_1$  および  $\phi_1$  は初期条件により定まる定数である. 実際の強制振動においては, 摩擦その他の減衰力があるので, 自由振動項 (第1項) は時間  $t$  とともに次第に減衰し,  $t \rightarrow \infty$  の極限をとるとゼロに収束する. したがって, 第2項が調和入力に対する定常状態の応答を表している. 式(2.A10), (2.A11)を変形すれば, 次式が得られる

$$X_0 = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}} \quad (2.A14)$$

$$\tan \phi = \frac{c\omega/k}{1 - \frac{m\omega^2}{k}} \quad (2.A15)$$

ここで、静的荷重  $F_0$  による静的変位が

$$X_{static} = \frac{F_0}{k}$$

となることから、 $\omega_0$  と  $h$  の定義を用いれば、応答の振幅  $X_0$  の静的変位  $X_{static}$  に対する比  $A$ , および  $\phi$  として式(2.16), (2.17)が得られる.

### 2. A. 3 基盤加振応答解の導出

相対変位を  $x$  とし、強制外力応答のケースと同様に  $z(t)$  として振幅  $Z_0$ , 円振動数  $\omega$  の正弦波状波形を仮定し,

$$x = Xe^{i\omega t} \quad z = Z_0 e^{i\omega t} \tag{2.A16}$$

とおく. ここに、 $X$  は複素数の定数である. 本文中の議論で述べたように、この場合は外力を  $mz$  と見なせばよいので、式(2.A10)より  $X$  は

$$X = \frac{-m\omega^2 Z_0}{(k - m\omega^2) + ic\omega} \tag{2.A17}$$

により与えられる. ここで、絶対変位  $y=x+z$  を導入し、同様に

$$y = Ye^{i\omega t}$$

ここに、 $Y$ : 複素数の定数

と表せば、 $Y=X+Z_0$  となる. したがって、

$$Y = X + Z_0 = \frac{k + ic\omega}{(k - m\omega^2) + ic\omega} Z_0 \tag{2.A18}$$

となることから、 $y(t)$  の振幅  $Y_0$  および  $z(t)$  に対する位相遅れ  $\phi$  は、それぞれ次のように与えられる.

$$Y_0 = |Y| = \sqrt{\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} Z_0$$

$$\tan \phi = -\frac{\text{Im}(Y)}{\text{Re}(Y)} = \frac{mc\omega^3}{k^2 + (c^2 - mk)\omega^2} \tag{2.A19}$$

以上の結果を用いれば、基盤変位  $z(t)$  が

$$z(t) = Z_0 \sin(\omega t) \tag{2.A20}$$

の場合、構造物の絶対変位  $y(t)$  を

$$y(t) = A_2 Z_0 \sin(\omega t - \phi) \quad (2.A21)$$

と表す時の動的応答倍率  $A_2$  および位相遅れ  $\phi$  は、固有円振動数  $\omega_0$  および減衰定数  $h$  を用いて

$$A_2 = \frac{Y_0}{Z_0} = \frac{1 + (2h\omega / \omega_0)^2}{\sqrt{[1 - (\omega / \omega_0)^2]^2 + (2h\omega / \omega_0)^2}} \quad (2.A22)$$

$$\tan \phi = \frac{mc\omega^3}{k^2[1 - (\omega / \omega_0)^2] + (c\omega)^2} = \frac{2h(\omega / \omega_0)^3}{1 - (\omega / \omega_0)^2 + (2h\omega / \omega_0)^2} \quad (2.A23)$$

と表される。上記の場合、基盤および構造物の加速度はそれぞれ

$$\begin{aligned} \ddot{z}(t) &= -Z_0 \omega^2 \sin(\omega t) \\ \ddot{y}(t) &= -A_2 \omega^2 Z_0 \sin(\omega t - \phi) \end{aligned} \quad (2.A24)$$

となることから、 $A_2$  は構造物応答加速度振幅の基盤加速度振幅の倍率にもなっていることがわかる。

#### 2.A.4 固有モードの直交性

固有ベクトル  $\{\phi\}_i$  には、直交性という重要な性質がある。  $i$  次モードの固有モード  $\{\phi\}_i$  と  $j$  次モード ( $i \neq j$ ) の固有モード  $\{\phi\}_j$  を考える。それぞれを質量マトリクス  $[M]$  と剛性マトリクス  $[K]$  に次式のようにかけると  $i \neq j$  の対角項だけが残る、他は全て 0 となる。また、減衰マトリクス  $[C]$  についても比例減衰を仮定すると同様の関係が成り立つ。

$$\{\phi\}_j^T [M] \{\phi\}_i = \begin{cases} 0 \\ M_s \quad (s = i = j) \end{cases} \quad (2.A25)$$

$$\{\phi\}_j^T [K] \{\phi\}_i = \begin{cases} 0 \\ K_s = \omega_s^2 \cdot M_s \quad (s = i = j) \end{cases} \quad (2.A26)$$

$$\{\phi\}_j^T [C] \{\phi\}_i = \begin{cases} 0 \\ C_s = 2h_s \cdot \omega_s \cdot M_s \quad (s = i = j) \end{cases} \quad (2.A27)$$

ここで、 $M_s$  を一般化質量、 $K_s$  を一般化剛性、 $C_s$  を一般化減衰とよぶ。本文で述べたように、固有モード  $\{\phi\}_i$  は、その形状が決まるのみであって、その大きさは任意である。一つの決め方として一般化質量  $M_s$  が 1 となるように正規化することが多い。

固有ベクトルを列成分とする  $N \times N$  の行列  $[\Phi]$  をモーダルマトリクスという。

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2 \quad \cdots \quad \{\phi\}_N]$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{array} \right\}_1 & \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{array} \right\}_2 & \dots & \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{array} \right\}_N \end{array} \right] \quad (2.A28)$$

式(2.A25) ~ (2.A27) の関係を式(2.A28)を用いて表現すると、次式になる。

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_N \end{bmatrix} \quad (2.A29)$$

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 M_1 & & & \\ & \omega_2^2 M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N^2 M_N \end{bmatrix} \quad (2.A30)$$

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = \begin{bmatrix} 2h_1 \omega_1 M_1 & & & \\ & 2h_2 \omega_2 M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2h_N \omega_N M_N \end{bmatrix} \quad (2.A31)$$

この直交性の性質を利用すると、線形の場合は多自由度系の地震応答解析を簡略化することが可能である。地震動を受けたときの多自由度系の運動方程式は、本文式(2.4.23)で示したように次式で表せる。

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = -[M] \{1\} \ddot{z} \quad (2.A32)$$

(2.A32)式の解 $\{x(t)\}$ を固有モード $\{\phi\}_i$ の線形和と考える。

$$\{x(t)\} = [\Phi] \{q\} = \{\phi\}_1 q_1(t) + \{\phi\}_2 q_2(t) + \dots + \{\phi\}_N q_N(t) \quad (2.A33)$$

式(2.A33)を式(2.A32)に代入し、前から $[\Phi]^T$ をかけると、

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{q}\} + [\Phi]^T [C] [\Phi] \{\dot{q}\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{q\} = -[\Phi]^T [M] \{1\} \ddot{z} \quad (2.A34)$$

となる。式(2.A29)~(2.A31)の関係を用いると、最終的には多自由度系の運動方程式(2.4.23)は一般座標 $q_s$ に関する $N$ 個の連立方程式(2.A35)に分解することができる。

$$M_s \ddot{q}_s + C_s \dot{q}_s + K_s q_s = -\{\phi\}_s^T [M] \{1\} \ddot{z} \quad (2.A35)$$

さらに、両辺を $M_s$ で割ると、(2.A25) (2.A26) (2.A27) より



$$\ddot{q}_s + 2h_s \omega_s \dot{q}_s + \omega_s^2 q_s = \frac{-\{\phi\}_s^T [M] \{1\}}{M_s} \ddot{z} = \beta_s \ddot{z} \quad (2.A36)$$